

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PAR ARTICLES PRÉSENTÉE À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DU  
DOCTORAT EN GÉNIE  
Ph.D.

PAR  
Sébastien DEMERS

DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE ANALYTIQUE ANISOTROPE NON LINÉAIRE DU  
DISQUE INTERVERTÉBRAL L5-S1

MONTREAL, LE 9 NOVEMBRE 2015

© Tous droits réservés, Sébastien Demers, 2015

© Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

## **PRÉSENTATION DU JURY**

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Hakim Bouzid, directeur de thèse  
Département de génie mécanique, École de technologie supérieure

Mme. Sylvie Nadeau, codirectrice  
Département de génie mécanique, École de technologie supérieure

M. Rachid Aissaoui, président du jury  
Département de génie de la production automatisée, École de technologie supérieure

M. Henri Champlaud, membre du jury  
Département de génie mécanique, École de technologie supérieure

M. Yvan Petit, membre du jury  
Département de génie mécanique, École de technologie supérieure

M. Marwan El Rich, examinateur externe indépendant  
Département de génie civil et environnement, Université d'Alberta

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 10 SEPTEMBRE 2015

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE



## AVANT-PROPOS

Mon retour aux études aux cycles supérieurs a d'abord été porté par le souhait ardent d'enseigner. La réalisation de cette thèse n'était toutefois pas tant le moyen d'une fin que d'une passion, qui a su se développer suite à un parcours professionnel qui m'a transporté de la conception de machines automatisées à la conception d'équipements de protection individuelle, jusqu'à la problématique des risques industriels associés aux maux de dos. La biomécanique s'est révélée être le secteur de recherche réunissant mon intérêt particulier pour la mécanique du solide et l'humain.

Durant mon parcours aux cycles supérieurs, on m'a accordé la chance de faire mes débuts en enseignement à l'École de technologie supérieure, puis j'ai pu décrocher un poste comme enseignant en Techniques de génie mécanique au Cégep de St-Jérôme. J'apprécie depuis chaque jour de travail. J'espère poursuivre ma contribution au développement des connaissances et transmettre cette passion pour la biomécanique à mes étudiants, ou du moins susciter leur intérêt à cette avenue du génie.

Cette thèse est présentée par articles afin de favoriser l'impact sur la communauté scientifique. Les deux premiers chapitres, rédigés en français, situent le sujet des quatre articles de revue avec comité de lecture, qui sont rédigés en anglais dans une suite logique. Les résultats de la thèse sont ensuite synthétisés dans un chapitre de discussion des résultats. Ce dernier chapitre est suivi d'une conclusion, puis des recommandations sont formulées pour la poursuite des travaux. Certains de ces travaux sont d'ailleurs déjà entamés.

Au moment d'écrire ces lignes, un article de revue est publié, un est en révision et deux sont soumis. Plusieurs conférences nationales et internationales avec comité de pairs ont aussi été présentées pour partager les résultats préliminaires des différentes étapes du projet. À cela s'ajoutent des présentations scientifiques par affiche.



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier sincèrement mes directeurs de recherche, les professeurs Abdel-Hakim Bouzid et Sylvie Nadeau, pour votre dévouement dans ce projet et dans votre travail. Votre contribution dans mon cheminement va au-delà de cette thèse ; vous m’avez offert des opportunités d’enseignement, un projet de conception d’un poste de travail ergonomique en industrie, et des responsabilités enrichissantes pour l’organisation de diverses activités de recherche. Ces expériences font partie de mon développement professionnel et sont bien rangées dans ma boîte à outils. Vous avez également fait preuve de flexibilité compte tenu des contraintes d’horaire liées à mon travail. Je vous suis chaudement reconnaissant, et votre professionnalisme mérite toute mon admiration.

Je remercie le directeur du jury, professeur Rachid Aissaoui, du Département de génie de la production automatisée, et les membres du jury, professeurs Henri Champlaud et Yvan Petit, du Département de génie mécanique. Soutenir mes travaux devant des gens de votre qualité est un honneur. Je remercie également chaleureusement l’examineur externe, M. Marwan El Rich, du Département de génie civil et environnement à l’Université d’Alberta, pour avoir accepté l’invitation à cette soutenance.

Un remerciement particulier revient à plusieurs organismes et associations pour leur soutien financier par le biais de subventions, de bourses au mérite et de bourses de reconnaissance à l’engagement étudiant. Je souhaite à cet égard souligner la contribution de l’Équipe de recherche en sécurité du travail (ÉREST), du Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FRQNT), du Fonds de Recherche du Québec – Société et culture (FRQSC), du Fonds de recherche du Québec – Santé (FRSQ), de l’Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST), du Réseau de recherche en santé et en sécurité du travail du Québec (RRSSTQ), de l’Association étudiante de l’ÉTS (AÉÉTS) et de l’Association des professeurs de l’ÉTS (APÉTS). Je ne pourrais passer sous silence l’apport du Service aux étudiants de l’ÉTS dans mon cheminement, qui a su offrir le soutien aux comités étudiants tels que le comité de développement durable TribuTerre, duquel j’ai été membre durant mes premières années d’étude à l’ÉTS.

## VIII

À mes parents, merci de m'avoir dit que la poursuite de mes rêves ne se remettait pas à plus tard. Vous êtes mes modèles. Enfin, la dernière et non la moindre, ma conjointe Stéphanie, qui n'a jamais cessé de croire en moi et de me supporter. Tu es toujours là pour souligner mes réussites, et tu es toujours là pour me soutenir dans les moments plus difficiles. Ton énergie, ton optimisme et surtout ta patience m'ont aidé à persévérer.



# DÉVELOPPEMENT D'UN MODÈLE ANALYTIQUE ANISOTROPE NON LINÉAIRE DU DISQUE INTERVERTÉBRAL L5-S1

Sébastien DEMERS

## RÉSUMÉ

La prévention des affections lombaires, particulièrement la hernie discale, nécessite une compréhension approfondie des mécanismes de déformation et de rupture du disque intervertébral. À ce jour, les moyens utilisés pour expliquer le comportement du disque soumis à divers chargements et dans différentes conditions de dégénérescence se limitent principalement aux études expérimentales et aux analyses par éléments finis. La caractérisation des tissus biologiques est difficile compte tenu des considérations éthiques entourant les sujets vivants et les spécimens cadavériques. L'échantillonnage est souvent limité, de sorte que les variations inter-individuelles prennent une importance considérable. Les simulations numériques sont intéressantes pour palier aux limitations expérimentales. La littérature montre que la méthode des éléments finis est la seule pour laquelle les scientifiques ont consacré beaucoup d'efforts de recherche. Ce manque de diversité des approches méthodologiques complique la triangulation des résultats des modèles biomécaniques.

Cette étude vise à développer un modèle analytique capable de prédire les contraintes en tout point de l'anneau fibreux d'un disque intervertébral sain en utilisant les théories des réservoirs sous pression et des matériaux composites. La modélisation est réalisée en trois phases.

Dans la première phase de la modélisation, l'aptitude de la théorie des membranes à représenter les multiples lamelles et les grandes déformations de l'anneau fibreux est étudiée, pour un chargement en compression uniaxiale. Cette étude présente une très bonne correspondance entre les contraintes du modèle analytique et celles d'un modèle simplifié d'analyse par éléments finis, ce qui justifie la poursuite des travaux dans cette direction.

Dans la deuxième phase, l'effet des fibres de Sharpey, qui ancrent les lamelles dans les plateaux vertébraux, est ajouté au modèle à l'aide de la théorie des poutres sur fondation élastique. L'ajout de cette caractéristique permet de prédire de façon réaliste la déformation générale de l'anneau fibreux, et un raffinement de la géométrie permet d'en améliorer la représentation.

L'anisotropie est incluse dans la troisième phase du modèle. Avec ce niveau de détails, le modèle démontre clairement le rôle de l'anisotropie dans la réduction des contraintes. Il prédit que la contrainte est maximale dans la lamelle la plus près du noyau pulpeux, et la distribution des contraintes dans l'anneau fibreux correspond bien aux résultats d'un modèle comparatif d'analyse par éléments finis.

Cette étude mène à conclure que l'approche analytique présente un potentiel intéressant pour la modélisation d'un disque intervertébral. À terme, il est attendu que ce modèle puisse aider

à valider les résultats d'analyses par éléments finis de pointe. Les travaux futurs devraient s'investir à inclure les propriétés hyperélastiques des fibres de collagène. Ensuite, la courbure sagittale complexe prédite par le modèle d'éléments finis devrait être étudiée afin d'améliorer la représentation des changements de géométrie dans le modèle analytique. L'asymétrie de la géométrie, des propriétés des matériaux et des chargements devrait également être incluse, ainsi que l'effet des perturbations locales de la microstructure et la flexibilité des plateaux vertébraux. L'estimation de la pression de contact entre les lamelles devrait être revue lorsque des données expérimentales seront disponibles. Enfin, un critère de défaillance devrait être proposé pour prédire la rupture ou la délamination des lamelles.

**Mots clés:** disque intervertébral, anneau fibreux, hernie discale, analyse de contraintes, théorie des membranes

# **ANALYTICAL MODELING OF THE NONLINEAR AND ANISOTROPIC L5-S1 INTERVERTEBRAL DISC**

Sébastien DEMERS

## **ABSTRACT**

Prevention of lumbar disc herniation requires that the failure mechanism of intervertebral discs be understood in clear details. The actual means for studying the mechanical behavior of intervertebral discs are experimental and finite element studies. Characterizing biological tissues is difficult due to ethical concerns, and specimens are generally limited in numbers. Therefore, inter-individual variations have considerable impacts in experimental studies. Numerical simulations are interesting to complement and support experimental studies. Literature shows that the finite element method is actually the only simulation tool for which the scientific community has given considerable efforts. The lack of methodological approaches make triangulation of results difficult to achieve.

This study aims at developing an analytical model to predict the stresses anywhere in the annulus fibrosus of a healthy intervertebral disc, using the theories of pressure vessels and material composite materials. Modeling is organized in three phases.

The first phase evaluates the ability of the thin shell theory to model multi-shell annulus fibrosus subjected to large deformations, in the case of uniaxial compression. This study shows a very good agreement between the stresses obtained analytically with those obtained with a simplified finite element model. This agreement gives confidence in the approach and allows continuing with model refinements.

The second phase adds the effect of the Sharpey's fibers anchoring the lamellae to the endplates, by using the theory of beam on elastic foundation. This characteristic allows the prediction of realistic deformation of the annulus fibrosus. A model refinement is provided to improve the deformed shape over the first idealized function used to represent the sagittal profile of the lamellae.

Lamellae anisotropy is added in the third phase. Its role in reducing stresses is clearly demonstrated. With this level of details, the model predicts maximal stresses in the innermost lamella, and stress distribution in the annulus fibrosus is in agreement with finite element modeling.

This study demonstrates the potential of the analytical approach to model intervertebral discs. It is expected that the model eventually helps validating the results of state-of-the-art finite element models. Meanwhile, future works should focus on adding material hyperelasticity, and improving the complex sagittal curvature of the lamellae occurring with large deformations. Geometrical, material and load asymmetry should also be investigated, including local structu-

ral defects. Considering elastic behavior of the endplates could be a further refinement. Finally, a suitable failure criterion would be necessary to predict lamellae tearing and delamination.

**Keywords:** intervertebral disc, annulus fibrosus, herniated disc, stress analysis, thin-shell theory

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE .....	5
1.1 Statistiques sur les affections vertébrales .....	5
1.2 Description du segment vertébral L5–S1 et études expérimentales .....	7
1.2.1 Disque intervertébral L5–S1 .....	7
1.2.2 Noyau pulpeux .....	10
1.2.3 Anneau fibreux .....	13
1.2.3.1 Nombre de lamelles .....	13
1.2.3.2 Épaisseur des lamelles .....	15
1.2.3.3 Orientation des fibres de collagène .....	16
1.2.3.4 Frisures des lamelles .....	17
1.2.3.5 Interactions interlamellaires .....	17
1.2.3.6 Renflement de l’anneau fibreux .....	18
1.2.3.7 Propriétés mécaniques .....	21
1.2.4 Vertèbres lombaires, sacrum et plateaux vertébraux .....	23
1.2.5 Arborescences de Sharpey .....	25
1.2.6 Moelle épinière et nerfs spinaux .....	26
1.2.7 Ligaments .....	27
1.3 Dégénérescences du disque intervertébral L5–S1 .....	28
1.3.1 Description de la hernie discale .....	28
1.3.2 Classification des dégénérescences du noyau pulpeux .....	29
1.3.3 Classification des dégénérescences de l’anneau fibreux .....	29
1.4 Revue des modèles biomécaniques analytiques .....	31
1.5 Revue des modèles biomécaniques numériques par éléments finis .....	34
1.5.1 Types d’analyse, géométrie et types d’éléments .....	35
1.5.2 Modélisation constitutive .....	38
1.5.3 Implémentation d’un modèle constitutif dans le logiciel d’éléments finis ANSYS 14 .....	41
1.6 Conclusion de la revue de la littérature .....	42
CHAPITRE 2 DÉFINITION DU PROJET DE RECHERCHE .....	45
2.1 Introduction .....	45
2.2 Objectifs et hypothèse de l’étude .....	45
2.3 Méthodologie de recherche .....	46
2.3.1 Théorie des membranes et fondements du modèle .....	48
2.3.2 Cheminement du projet de recherche .....	51
2.4 Résultats escomptés, impacts envisagés et plan de publications .....	51

CHAPITRE 3	ARTICLE 1 : ON THE MODELING OF AN INTERVERTEBRAL DISC USING A NOVEL LARGE DEFORMATION MULTI-SHELL APPROACH .....	55
3.1	Introduction .....	57
3.2	Methods .....	61
3.2.1	Model Properties .....	61
3.2.2	Static Equilibrium .....	63
3.2.3	Compatibility of Displacements .....	65
3.2.4	Longitudinal and Circumferential Stresses .....	67
3.2.5	Large Deformation .....	68
3.2.6	Finite Element Models .....	68
3.3	Results .....	69
3.4	Discussion .....	73
3.5	Conclusion .....	77
CHAPITRE 4	ARTICLE 2 : EFFECT OF SHARPEY'S FIBERS ON THE STRESS DISTRIBUTION IN THE ANULUS FIBROSUS OF AN INTERVERTEBRAL DISC SUBJECTED TO COMPRESSION .....	81
4.1	Introduction .....	83
4.2	Methods .....	85
4.2.1	Finite Element Model .....	86
4.2.2	Analytical Model .....	87
4.2.2.1	Membrane Analysis .....	89
4.2.2.2	Discontinuity Analysis .....	91
4.3	Results .....	99
4.4	Discussion .....	104
4.5	Conclusion .....	107
CHAPITRE 5	ARTICLE 3 : ANALYTICAL EVALUATION OF STRESSES AND DISPLACEMENTS OF AN INTERVERTEBRAL DISC .....	111
5.1	Introduction .....	112
5.2	Methods .....	114
5.2.1	Sagittal profiles .....	117
5.2.2	Membrane analysis .....	118
5.2.3	Edge effects .....	119
5.2.4	Combined effects .....	122
5.2.5	Finite element model .....	123
5.3	Results .....	123
5.4	Discussion .....	128
5.5	Conclusion .....	130

CHAPITRE 6	ARTICLE 4 : ANISOTROPIC MULTI-SHELL ANALYTICAL MODELING OF AN INTERVERTEBRAL DISC SUBJECTED TO AXIAL COMPRESSION .....	135
6.1	Introduction .....	136
6.2	Methods .....	139
6.2.1	Model Parameters .....	139
6.2.2	Analytical Model .....	140
6.2.2.1	Membrane Shell Analysis .....	141
6.2.2.2	Discontinuity Analysis .....	144
6.2.3	Material Properties .....	147
6.2.4	Finite Element Model .....	151
6.3	Results .....	152
6.4	Discussion .....	157
6.5	Conclusion .....	160
CHAPITRE 7	DISCUSSION DES RÉSULTATS .....	165
7.1	Introduction .....	165
7.2	Résumé des articles de revue .....	165
7.3	Récapitulation des principaux résultats de la thèse .....	166
CONCLUSION GÉNÉRALE	.....	171
RECOMMANDATIONS	.....	175
ANNEXE I	LISTE DES PUBLICATIONS EN LIEN AVEC LA THÈSE .....	179
ANNEXE II	MAILLAGE, CHARGEMENT ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRES DES MODÈLES NUMÉRIQUES PAR ÉLÉMENTS FINIS .....	181
ANNEXE III	QUESTION D'ÉPISTÉMOLOGIE .....	185
ANNEXE IV	PROGRAMMES MATLAB POUR L'ARTICLE 4 .....	189
ANNEXE V	PROGRAMME ANSYS POUR L'ARTICLE 4 .....	269
LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	.....	299





## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 1.1	Classification de quelques études d'éléments finis selon les types d'éléments et matériaux utilisés pour le noyau pulpeux ..... 36
Tableau 1.2	Classification de quelques études d'éléments finis selon les types d'éléments et matériaux utilisés pour l'anneau fibreux ..... 37
Tableau 6.1	Experimental material properties of lamellae bundles drawn from O'Connell <i>et al.</i> (2012).....148
Tableau 6.2	Theoretical material properties of individual lamellae .....150
Tableau 6.3	Stress results at the transverse plane.....155
Tableau 7.1	Comparaison des principaux résultats de l'étude avec les données expérimentales de la littérature .....168



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1	Vue postéro-latérale de la colonne vertébrale ..... 8
Figure 1.2	Segment vertébral L5–S1 ..... 9
Figure 1.3	Courbes $\sigma - \varepsilon$ tirées des données expérimentales de Holzapfel <i>et al.</i> (2005) ..... 22
Figure 1.4	Anatomie d’une vertèbre lombaire ..... 24
Figure 1.5	Vue postéro-latérale du sacrum ..... 25
Figure 2.1	Méthodologie de recherche ..... 47
Figure 2.2	Domaine conventionnel d’utilisation de la théorie des membranes ..... 49
Figure 2.3	Cheminement du projet de recherche ..... 52
Figure 3.1	Representation of intradiscal pressure ..... 58
Figure 3.2	Geometry of a single lamella and illustration of an infinitesimal membrane element ..... 62
Figure 3.3	Free body diagram of the axisymmetric intervertebral disc ..... 64
Figure 3.4	Compatibility of displacements ..... 67
Figure 3.5	Convergence of the analytical model with respect to FEM ..... 70
Figure 3.6	Membrane stresses ..... 71
Figure 3.7	Contact pressures between adjacent lamellae ..... 73
Figure 3.8	Radial displacements along the height of the disc ..... 74
Figure 4.1	Flowchart of load increment determination and total solution methodologies ..... 88
Figure 4.2	Partial geometry of the anulus fibrosus, free body diagram and sagittal cross-section showing boundary conditions ..... 90
Figure 4.3	Modeling of the edge reactions ..... 97

Figure 4.4	Difference between the first solution and the first iteration of the membrane solution as a function of the number of load increments, in the circumferential stress at the transverse plane on the innermost lamella .....	99
Figure 4.5	Radial pressure in the NP and AF. The numbers in parentheses identify the contacting lamellae. The NP/AF boundary position is based on the displacements at the mid-transverse plane given by the analytical model.....	100
Figure 4.6	Stress distribution across the anulus fibrosus .....	101
Figure 4.7	Membrane and discontinuity components of circumferential stress, and resultant of circumferential stress in the innermost lamella along the height of the disc .....	102
Figure 4.8	Initial and deformed shape of the disc .....	103
Figure 4.9	Rotations at the upper vertebral endplate .....	104
Figure 5.1	Geometry, free body diagram and sagittal cross section of a lamella including boundary conditions .....	115
Figure 5.2	Flowchart of solution methodology .....	116
Figure 5.3	Contact pressure distribution in the AF, as a function of the lamella number and the position along the $z$ axis .....	124
Figure 5.4	Stress distribution across disc's height and lamellae .....	125
Figure 5.5	Initial and deformed shape of the disc .....	126
Figure 5.6	Rotations at the upper vertebral endplate .....	127
Figure 6.1	Analytical method .....	142
Figure 6.2	Membrane forces acting on a membrane element and free body diagram for static equilibrium.....	143
Figure 6.3	Boundary conditions .....	145
Figure 6.4	Material model .....	147
Figure 6.5	Contact pressure between adjacent lamellae at the transverse plane .....	153

Figure 6.6	(a) Final circumferential stress obtained analytically in the innermost lamella, and divided into membrane and discontinuity stresses (b) Comparison of the final analytical circumferential stress to that of FE model .....154
Figure 6.7	Stresses through the AF thickness at the transverse plane .....155
Figure 6.8	Initial and deformed shape of the lamellae obtained by the analytical and finite element modeling .....156



## **LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES**

AF	Anneau fibreux
DIV	Disque intervertébral
L4–L5	4 <sup>e</sup> vertèbre lombaire – 5 <sup>e</sup> vertèbre lombaire
L5–S1	5 <sup>e</sup> vertèbre lombaire – 1 <sup>re</sup> vertèbre sacrée
LIE	Ligament inter-épineux
LIT	Ligament inter-transversaire
LLA	Ligament longitudinal antérieur
LLP	Ligament longitudinal postérieur
LSE	Ligament supra-épineux
NP	Noyau pulpeux
TMS	Trouble musculosquelettique





## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

$a_1$ à $a_3$	Constantes d'un modèle constitutif
$b_1$ à $b_3$	Constantes d'un modèle constitutif
$c_1$ à $c_5$	Constantes d'un modèle constitutif
$I_\alpha$	Invariant du tenseur de déformation Cauchy-Green « droit »
$J$	Ratio du volume déformé sur le volume initial dans un modèle constitutif
$W$	Bilan énergétique d'un modèle constitutif (N/mm <sup>2</sup> )
$W_d$	Énergie de distorsion (N/mm <sup>2</sup> )
$W_{fibres}$	Énergie de déformation des fibres (N/mm <sup>2</sup> )
$W_{IFM}$	Énergie de déformation liée à l'interaction entre les fibres et la matrice (N/mm <sup>2</sup> )
$W_{matrice}$	Énergie de déformation de la matrice (N/mm <sup>2</sup> )
$W_v$	Énergie de déformation volumique (N/mm <sup>2</sup> )
$\mu ; \mu_1$	Modules de cisaillement d'un modèle constitutif
$\vartheta$	Angle associé à la position circonférentielle ayant pour origine le site antérieur



## INTRODUCTION

Les affections vertébrales demeurent un enjeu majeur en santé et en sécurité au travail malgré les nombreux efforts déployés en prévention. Il est difficile d'y tourner le dos quand on remarque qu'elles ont compté pour près de 30% des lésions professionnelles répertoriées avec indemnités de remplacement du revenu au Québec entre les années 2003 et 2011 (Allaire *et al.*, 2007; Provencher *et al.*, 2010, 2012). Parmi ces affections, la hernie discale est au rang des pires en termes socioéconomiques. La région lombaire est la plus touchée par celle-ci, particulièrement le segment lombo-sacré.

Une meilleure connaissance du mécanisme de lésion entraînant la hernie discale permettra de réduire les risques de maladies professionnelles en favorisant l'élaboration de meilleures procédures de travail et la conception d'outils et de postes de travail mieux adaptés. Elle permettra aussi d'améliorer l'efficacité des actions en prévention par le biais d'une sensibilisation plus ciblée sur les causes de la hernie discale. Du point de vue clinique, l'approfondissement des connaissances fondamentales est indispensable et permettra d'améliorer les traitements, tel qu'avancé par Williams et Park (2008, p. 2159) : « Particularly with respect to clinical applications, much more effort should be made toward defining and understanding the underlying pathophysiological processes, rather than developing additional treatment options. [...] ».

La compréhension du mécanisme lésionnel de la hernie discale fait intervenir la notion de causalité, ou de déterminisme, c'est-à-dire que tout effet peut être assigné à l'action d'une cause ou d'un nombre déterminé de causes (Laurencelle, 2005). Comme rapporté par Nadeau (2001, p. 51), « une cause produit un effet par un mécanisme » lorsque certaines conditions sont satisfaites. Les effets de la hernie discale sont bien connus et les causes pouvant déclencher le mécanisme de lésion du disque sont quant à elles qualitativement bien ciblées (charge excessive en combinaison avec une posture inappropriée, traumatisme, etc.). Toutefois, il est beaucoup moins évident de développer des modèles analytiques capables de représenter le mécanisme lésionnel inhérent à la colonne vertébrale et à ses structures avoisinantes. Pourtant, de tels modèles sont nécessaires pour établir la relation de causalité, en traduisant les facteurs de risques en effets quantifiables. Les résultats de ces modèles, en l'occurrence les effets, doivent

être interprétés et validés afin de vérifier la plausibilité biologique et logique (Nadeau, 2001) et de tirer des conclusions et recommandations exploitables en milieu de pratique.

La recherche des causes de la hernie discale a fait l'objet de nombreuses études à ce jour. Celles-ci sont majoritairement fondées sur des modèles biomécaniques expérimentaux et des simulations numériques dans le but d'évaluer les mécanismes de lésion. Les avancées technologiques ont permis de générer des modèles biomécaniques de plus en plus élaborés. Ils sont toutefois confrontés à la complexité structurelle des organes et des tissus humains, à leurs propriétés mécaniques difficilement mesurables *in vivo* et à la pluralité des paramètres environnementaux dans lequel l'être humain évolue. Le développement des modèles expérimentaux est en partie limité par des considérations éthiques. Il l'est aussi à cause des conditions particulièrement strictes assurant la validité des essais expérimentaux. En effet, la préparation des échantillons post-mortem doit éviter la déshydratation des tissus. Elle doit aussi être réalisée dans un délai suffisamment court suivant le décès pour limiter la perte du comportement viscoélastique des matériaux. La méthode des éléments finis, bien qu'offrant une flexibilité inégalée pour l'étude des structures biologiques, se heurte à des problèmes de validation des résultats. En effet, la triangulation des résultats des études biomécaniques est difficile à réaliser à l'heure actuelle, dû à l'accessibilité restreinte à différentes approches méthodologiques. C'est pourquoi un modèle fondé sur une méthodologie différente de l'approche expérimentale et des éléments finis serait d'un apport important. Dans cette optique, cette étude propose d'utiliser une approche encore très peu exploitée dans ce domaine, mais qui offre un potentiel intéressant : la modélisation **analytique** d'un disque intervertébral (DIV).

Pour répondre à cette problématique, une revue de la littérature est présentée au chapitre 1 afin de poser les hypothèses simplificatrices nécessaires à la modélisation. Le sujet y est mis en contexte par la présentation de quelques statistiques sur les maux de dos, permettant ainsi de mieux saisir les impacts socioéconomiques de cette problématique. Les objectifs du projet et la méthodologie de recherche sont définis au chapitre 2. Les chapitres 3 à 6 présentent chaque article de revue, dont le contenu est introduit au chapitre 2. Une discussion générale synthétise ensuite les résultats essentiels de la thèse. Pour terminer, une conclusion est présentée, puis des

recommandations sont émises pour la poursuite des travaux de recherche. La liste complète des publications rédigées durant la thèse est présentée en annexe I. L'annexe II présente le maillage, les chargements et les conditions aux frontières utilisés pour les modèles numériques par éléments finis de chaque article de revue. L'annexe III est fournie en réponse à une question d'épistémologie importante soulevée dans la communauté scientifique durant la réalisation de la thèse. Enfin, les programmes informatiques développés pour le quatrième article de revue sont fournis en annexes IV et V.



## CHAPITRE 1

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

#### 1.1 Statistiques sur les affections vertébrales

Dans son bulletin d'information d'août 2009, l'IRSST rapportait que 37% des lésions indemnisées au Québec de 2003 à 2007 étaient d'ordres musculosquelettiques (Collinge *et al.*, 2009). En France, cette proportion atteignait 78% pour l'année 2007, selon Guerber-Cahuzac (2010). Des études de la CSST (Allaire *et al.*, 2007; Provencher *et al.*, 2010, 2012) révélaient quant à elles que les affections vertébrales ont représenté près de 30% des lésions professionnelles répertoriées avec indemnités de remplacement du revenu au cours des années 2003 à 2011. On constate que les troubles musculosquelettiques (TMS) représentent toujours un enjeu social de taille, comptabilisant 24 490 lésions en 2013, soit 27,7% des dossiers ouverts et acceptés pour cette année (Provencher *et al.*, 2014).

D'après les bilans de la CSST, la hernie discale s'affiche parmi les lésions spécifiques les plus accablantes en termes socio-économiques. Bien qu'elle ait compté parmi les lésions vertébrales les moins fréquentes, elle a affiché, d'une part, le plus haut coût moyen d'indemnisation en 2003, 2005, 2006, 2007 et 2009 avec, à titre d'exemple, un coût moyen de 11 863\$ par individu en 2006 et de 11 550\$ en 2009. Ce montant est passé à 12 341\$ en 2011, légèrement sous le montant attribué pour les fractures vertébrales. D'autre part, elle a engendré une durée moyenne d'absentéisme par individu de 175,4 jours (près de six mois) en 2006, 155,4 jours en 2009 et 169,2 jours en 2011. Une étude de l'IRSST mentionne l'importance d'orienter la recherche dans cette direction :

« Il est d'autre part reconnu que près de 80% des ressources allouées aux maux de dos chez les travailleurs sont dirigées vers une minorité de cas (moins de 10%) ayant nécessité un arrêt de travail de plus de six mois. Il importe donc de concentrer des efforts de recherche sur cette minorité de cas sévères [...] ». (Dionne *et al.*, 2004, p. i)

Guerber-Cahuzac (2010) affirme également que les affections vertébrales sont les TMS les plus graves, sans toutefois spécifier les lésions spécifiques en cause.

Sur le plan économique, ces statistiques classent la hernie discale en tête de file avec les fractures vertébrales. Fait important, il est démontré que la région lombaire est la plus touchée par la hernie discale et plus particulièrement la jonction lombo-sacrée (Provencher *et al.*, 2012). Cette jonction concerne le disque intervertébral L5–S1, situé entre la cinquième vertèbre lombaire et le sacrum. Le disque adjacent L4–L5 est lui aussi très fréquemment affligé d’une hernie discale (Lauerman et Graw, 2008; Kuo *et al.*, 2010).

Outre l’aspect financier, les personnes aux prises avec une hernie discale peuvent, dans plusieurs cas, souffrir de douleurs aiguës. Au-delà des troubles physiologiques, on note une possible atteinte morale au niveau du rôle social de l’individu et de ses capacités fonctionnelles (Saban *et al.*, 2001).

Cette réalité explique pourquoi tant d’efforts sont déployés en santé et en sécurité au travail dans la prévention des lésions au dos, notamment pour réduire l’incidence et la gravité des cas de hernie discale. Compte tenu des enjeux socio-économiques considérables, il importe de mieux comprendre le phénomène de lésion du disque intervertébral. Une partie importante de cette compréhension repose sur la recherche qui, actuellement, fait face à plusieurs questions non résolues. Cette revue de la littérature adresse ces questions par le biais d’une présentation générale des modèles biomécaniques utilisés, de leur apport aux connaissances et de leurs limitations. Puisque le segment *5<sup>e</sup> vertèbre lombaire – 1<sup>re</sup> vertèbre sacrée* (L5–S1) est l’un des plus touchés par la hernie discale, cette étude focalise sur le disque intervertébral L5–S1. Une description sommaire de ce segment vertébral est d’abord faite afin de permettre au lecteur de bien comprendre les travaux de la thèse. Cette description est basée sur des études histologiques et sur des résultats d’essais expérimentaux.



## 1.2 Description du segment vertébral L5–S1 et études expérimentales

La colonne vertébrale est une composante du système musculo-squelettique soutenant le tronc et les membres supérieurs. Elle permet la mobilité en flexion et en torsion du tronc et protège la moelle épinière, située dans le canal rachidien. Sa structure osseuse articulée par symphyse est composée de 33 à 34 vertèbres. Chacune d'entre elles est séparée par un disque intervertébral, à l'exception de la première vertèbre cervicale et de celles du sacrum et du coccyx. Le sacrum et le coccyx sont non articulés puisque leurs vertèbres sont soudées entre elles. On compte ainsi un total de 23 disques intervertébraux. La figure 1.1 montre une vue postéro-latérale du rachis et indique l'appellation de chaque vertèbre, selon qu'elle est située dans la région cervicale (C), thoracique (T), lombaire (L), sacrée (S) ou coccygienne (Co). On dénombre sept vertèbres cervicales, douze vertèbres thoraciques, cinq vertèbres lombaires, cinq vertèbres sacrées et quatre ou cinq vertèbres coccygiennes. Les régions se distinguent par leur courbure : on note une lordose dans les régions cervicale et lombaire alors qu'une cyphose caractérise la région thoracique.

La colonne s'articule à chaque segment vertébral. Bien qu'un disque intervertébral ne soit pas présent à tous les niveaux vertébraux, on définit ici un segment comme un ensemble de deux vertèbres et du disque intervertébral les unissant. Chaque segment compte trois degrés de liberté en rotation, soit la flexion sagittale, la flexion latérale et la torsion. Le mouvement de translation est peu permissif, mais tout de même présent dans les trois directions, portant le total de degrés de liberté à six. Ces mouvements peuvent être combinés.

Les prochaines sous-sections s'attarderont à caractériser le segment vertébral L5–S1, illustré à la figure 1.2 et spécifiquement visé par l'étude.

### 1.2.1 Disque intervertébral L5–S1

Le disque intervertébral est au centre de la problématique de la hernie discale. Il lie les vertèbres entre elles, assure la mobilité de la colonne vertébrale et absorbe l'énergie cinétique lors des mouvements relatifs des segments vertébraux (Cassidy *et al.*, 1989). Les connaissances ac-

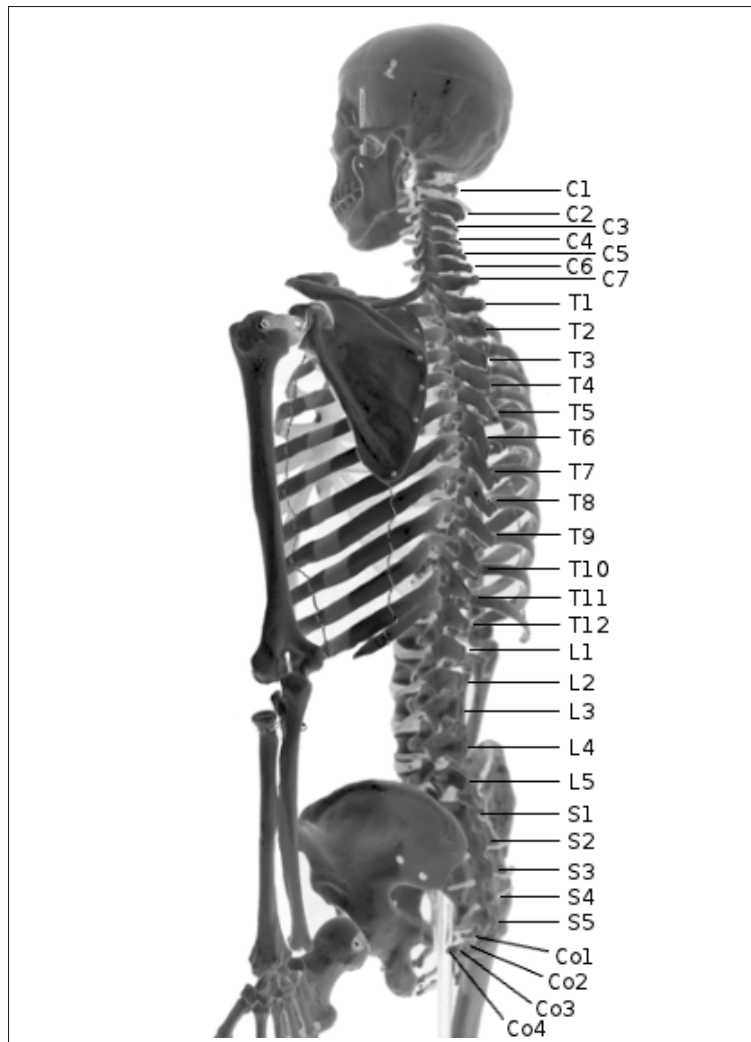


Figure 1.1 Vue postéro-latérale de la colonne vertébrale

tuelles soutiennent qu'il n'est vascularisé et innervé qu'en périphérie (Bendo et Awad, 2006). Il se compose de deux entités distinctes : le noyau pulpeux <sup>1</sup> (NP), et l'anneau fibreux <sup>2</sup> (AF). La figure 1.2 illustre l'anneau fibreux entourant le noyau pulpeux à la manière d'un réservoir sous pression (Aspden *et al.*, 1981). Les sous-sections 1.2.2 et 1.2.3 présentent les détails du noyau pulpeux et de l'anneau fibreux.

1. Souvent appelé par son nom latin *nucleus pulposus*.

2. Souvent appelé par son nom latin *anulus fibrosus*.

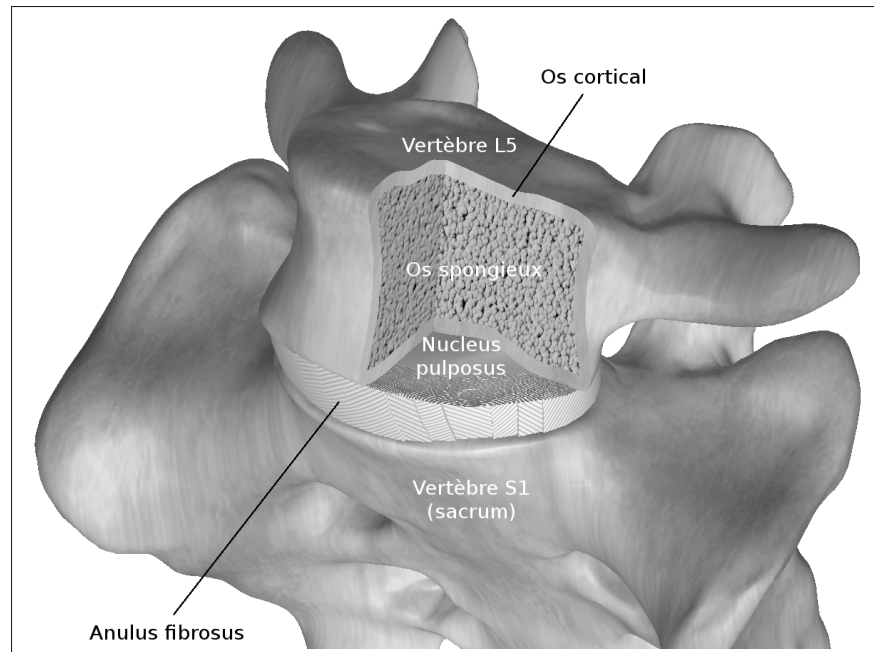


Figure 1.2 Segment vertébral L5–S1

Le profil transversal du disque intervertébral est sensiblement le même que celui des plateaux vertébraux auxquels il est attaché (se référer à la sous-section 1.2.4 pour une description des plateaux vertébraux). Du niveau L1 au niveau S1, le profil passe d'une forme de haricot à une forme quasi elliptique (Eijkelkamp, 2002). La simplification de la forme réelle du disque intervertébral L5–S1 par une forme elliptique n'a pas d'influence notable sur les résultats des contraintes selon Bouvette (2005). Le disque L5–S1 se distingue des autres disques lombaires par une forte inclinaison de ses faces d'assise. On peut s'attendre à ce que cette caractéristique influence l'intensité des contraintes et possiblement la localisation des contraintes maximales dans l'anneau fibreux du disque L5–S1. Prud'Homme (2008) a suggéré une géométrie basée sur l'approximation de l'ellipse. Le demi-grand axe de l'ellipse du profil extérieur de l'anneau fibreux est de 25,5 mm et son demi-petit axe est de 16,5 mm. Ce profil délimite le disque intervertébral. Le demi-grand axe de l'ellipse du profil intérieur de l'anneau fibreux est de 12,6 mm et son demi-petit axe est de 8,3 mm. Ce profil délimite le noyau pulpeux. Il en résulte une épaisseur moyenne de l'anneau fibreux de 10,6 mm, ce qui est largement supérieur aux résultats de Cassidy *et al.* (1989) et Holzapfel *et al.* (2005). L'angle suggéré entre les deux assises du disque

est de  $14^\circ$ . Par traitement d'images de tomodensitométrie, Zhou *et al.* (2000) ont mesuré une hauteur moyenne de 10,7 mm sur 126 disques intervertébraux L5–S1. Cette mesure a été prise à la ligne médiane du plan sagittal. Les hauteurs mesurées pour les disques intervertébraux L3–L4 et L4–L5 ont été de 11,6 mm et 11,3 mm respectivement, ce qui concorde avec la hauteur moyenne de 11 mm mesurée par O'Connell *et al.* (2010) pour les disques intervertébraux L3–L4 et L4–L5.

### 1.2.2 Noyau pulpeux

Le noyau pulpeux est un matériau composite présentant une structure peu organisée de fibres de collagène de type I à l'intérieur d'un gel de protéoglycanes (collagène de type II). Les glycosaminoglycanes contenues dans les chaînes moléculaires de protéoglycanes leur confèrent une propriété hydrophile. Le noyau pulpeux sain contient ainsi jusqu'à 88% d'eau (Cassidy *et al.*, 1989). Il est translucide chez les enfants et les jeunes adultes et plutôt blanchâtre chez les adultes en âge avancé (Iatridis *et al.*, 1996). Le gel hautement hydraté chez la population jeune est un liquide pratiquement incompressible (Hickey et Hukins, 1980; Iatridis *et al.*, 1996) au comportement hydrostatique (Nachemson, 1981).

En étudiant les propriétés viscoélastiques du noyau pulpeux à l'aide d'un spectromètre mécanique, Iatridis *et al.* (1996) ont démontré que les conditions de chargement influencent son comportement. Treize échantillons prélevés de huit disques intervertébraux lombaires ayant des noyaux pulpeux intacts ont été étudiés en torsion pure sur l'appareil de test. Les spécimens ont été préparés dans les 24 heures suivant le décès, et leur contenu en eau a été maintenu, soit en les enveloppant dans un scellant en plastique, soit en les congelant, selon l'étape de préparation. Les essais ont été faits dans une chambre à humidité contrôlée. Il en ressort que le comportement mécanique du noyau pulpeux est hautement sensible au taux de déformation. Il se rigidifie à mesure que la fréquence du chargement augmente et se comporte davantage comme un solide sous un chargement dynamique. Durant l'étape transitoire, la viscosité n'est pas négligeable. Cependant, à de faibles taux de déformation, il réagit comme un fluide et la viscosité n'influence pas son comportement. Les auteurs n'ont pas indiqué si les spécimens

avait été congelés lentement ou rapidement, ni si un agent de cryopréservation avait été utilisé. Or, Lam *et al.* (2011) ont démontré qu'une certaine concentration d'agent de conservation était nécessaire pour éviter le raidissement viscoélastique des tissus de disques intervertébraux porcins lors de la cryoconservation pendant quatre semaines. Ceci indique que l'utilisation d'un agent de conservation ne peut que favoriser l'observation d'un comportement fluide à de faibles taux de déformation. Ainsi, les observations de Iatridis *et al.* (1996) ne sont pas remises en doute pour un chargement statique, même dans l'éventualité où un agent de conservation n'avait pas été utilisé. Le noyau pulpeux réagit donc comme un fluide incompressible et non visqueux dans le cas d'un chargement quasi statique.

Lors des chargements mécaniques, la pression dans le noyau pulpeux augmente (Nachemson, 1981; Adams *et al.*, 1996), ce qui a pour effet de gonfler l'anneau fibreux, en plus d'incurver les plateaux vertébraux (Roaf, 1960) et d'occasionner une migration du liquide intradiscal dans les plateaux vertébraux (Kurtz et Edidin, 2006). McMillan *et al.* (1996) ont enregistré une perte de liquide de 15% par le noyau pulpeux et jusqu'à 30% dans certaines zones de l'anneau fibreux, suite à un chargement de 1500 N en flexion-compression soutenu pendant six heures sur des segments lombaires cadavériques. Leurs résultats corroborent ceux de Botsford *et al.* (1994) issus d'images par résonance magnétique, qui indiquent une perte de volume de 16 à 17% dans un disque sain durant le cycle diurne. Selon ces auteurs, la perte de volume est la principale cause de la variation en hauteur du disque alors que le renflement du disque a un effet minime. Le volume initial de liquide est retrouvé lors du cycle de repos.

Quelques études *in vivo* ont été menées sur des humains afin de connaître la pression intradiscale occasionnée par différentes charges et postures (Nachemson et Morris, 1964; Nachemson, 1981; Wilke *et al.*, 1999; Sato *et al.*, 1999). Ces études ont démontré que la variation de pression intradiscale est reliée non seulement à la charge externe, mais aussi à la posture. Selon Nachemson (1981), la pression intradiscale en position assise est de 40% supérieure à celle en position debout. De plus, le soulèvement d'une masse de 10 kg, en gardant le dos droit, augmente la pression de 340% tandis qu'une flexion vers l'avant combinée à une rotation du tronc en soutenant une masse de 10 kg l'augmente de 400% comparativement à la pression

en position debout sans charge externe. Ces résultats sont en bonne corrélation avec ceux de Wilke *et al.* (1999, 2001), à l'exception d'écarts notables entre les différentes postures assises. La pression varie entre 0,22 MPa et 0,75 MPa en position debout avec le dos droit (Sato *et al.*, 1999; Wilke *et al.*, 2001), et elle grimpe jusqu'à 1,50 MPa en flexion (Sato *et al.*, 1999). Ces résultats d'expériences in vivo doivent être considérés avec discernement, car peu de sujets ont été étudiés. De plus, l'utilisation de ces résultats pour l'étude d'un segment vertébral requiert l'estimation de la charge appliquée sur ce segment. Or, il est difficile d'estimer la part de la masse corporelle supportée par un niveau particulier de la colonne vertébrale.

À cet effet, les études in vitro sont d'une grande utilité. Il a été démontré qu'une charge en compression uniaxiale de 1000 N à 2000 N est représentative de la force de compression axiale agissant sur le rachis lombaire durant des travaux modérés (Adams *et al.*, 1996; Schmidt *et al.*, 2010). Les charges estimées entre 500 N et 2100 N par Nachemson (1981) appuient ces valeurs. McNally et Adams (1992) ont mesuré le profil de pression à travers dix spécimens de disques intervertébraux lombaires à l'aide d'un manomètre spécialement conçu. L'action d'une force de compression de 500 N à faible vitesse a révélé une pression hydrostatique d'environ 0,55 MPa. Dans l'étude de Adams *et al.* (1996), les six segments L4–L5 sains ont révélé une pression moyenne dans le noyau pulpeux de 1,94 MPa pour une charge de 2000 N. La comparaison des résultats des spécimens L2–L3 et L4–L5 a révélé une différence de pression non significative. Il serait donc raisonnable d'extrapoler au disque L5–S1 les valeurs de pression mesurées dans les segments L4–L5.

La dégénérescence des disques s'est révélée le facteur ayant le plus d'influence sur la pression intradiscale (Adams *et al.*, 1996). Le noyau pulpeux est plus petit et la pression moyenne mesurée a été de 31% plus faible dans les spécimens montrant des signes de dégénérescence sévère. Il importe donc de considérer les quelques spécimens sains plutôt que l'ensemble des disques afin de bien représenter le groupe ciblé, c'est-à-dire la classe de travailleurs jeunes sans dégénérescence au niveau lombaire. Dans la région centrale des disques sévèrement dégénérés, la variation de pression atteint 10%, mais la pression demeure hydrostatique. Dans les disques sains, la pression intradiscale s'étend dans les lamelles intérieures de l'anneau fibreux avant

de chuter graduellement vers l'extérieur du disque. Une étude similaire a révélé qu'au niveau cervical, la pression hydrostatique variait à travers le noyau pulpeux dans quelques spécimens, possiblement à cause d'un contenu fibreux plus important dans les disques de la région cervicale et d'un anneau fibreux plus mince (Skrzypiec *et al.*, 2007). Il semble cohérent de supposer que la pression hydrostatique soit uniforme dans le noyau pulpeux d'un disque lombaire sain. La littérature donne une relation entre la charge de compression axiale sur un segment lombaire et la pression intradiscale, ce qui peut être mis à profit dans les études biomécaniques.

### 1.2.3 Anneau fibreux

Bien que l'anneau fibreux ait les mêmes constituants que le noyau pulpeux, sa composition et sa structure diffèrent grandement. Ses réseaux de fibres de collagène de type I (Cassidy *et al.*, 1989), hautement organisés dans la matrice extracellulaire, forment des couches lamellaires concentriques autour du noyau pulpeux, tel que représenté à la figure 1.2. Étant lié aux plateaux vertébraux, l'anneau fibreux s'apparente à un réservoir confinant le noyau pulpeux (Aspden *et al.*, 1981). Dans le but de représenter de façon réaliste l'anneau fibreux, il importe d'en connaître la structure, les dimensions et les propriétés mécaniques. Ces éléments sont l'objet des prochaines sous-sections.

#### 1.2.3.1 Nombre de lamelles

Une des principales caractéristiques structurales de l'anneau fibreux est sa configuration en lamelles concentriques. Marchand et Ahmed (1990) ont réalisé une dissection sur 32 spécimens cadavériques de disques intervertébraux (16 spécimens L2–L3 et 16 spécimens L4–L5) à l'état déshydraté, afin d'étudier la structure de l'anneau fibreux. Pour chacun des deux niveaux vertébraux choisis, huit spécimens âgés de 18 à 29 ans et huit spécimens âgés de 53 à 76 ans ont été étudiés. Tous les spécimens du groupe *jeune* étaient de classe I tandis que les spécimens du groupe *vieux* étaient de classes I et II, conformément à la classification décrite par Galante (1967). L'étude a révélé que l'anneau contenait de 15 à 25 lamelles concentriques distinctes. Ce nombre varie selon la position circonférentielle et l'âge des spécimens. Environ



la moitié des lamelles observées sont incomplètes, c'est-à-dire qu'elles ne s'étendent pas sur la hauteur totale du disque entre les deux plateaux vertébraux. Ceci pourrait expliquer la variation circonférentielle du nombre de lamelles.

Marchand et Ahmed (1990) ont compté en moyenne 23 lamelles dans les disques *jeunes* du niveau L2–L3, et 24 dans les disques *jeunes* du niveau L4–L5. Dans les disques *vieux*, le décompte moyen est de 18 et 19 respectivement. Cassidy *et al.* (1989) ont, quant à eux, dénombré plus ou moins 38 lamelles au site antérieur dans cinq échantillons L1–L2, soit près du double du décompte de Marchand et Ahmed (1990). Ils n'ont remarqué aucune interruption des lamelles entre les plateaux vertébraux. Ce nombre est à peu près constant selon la circonférence et ne semble pas être affecté par l'âge, ce qui est contraire aux observations de Marchand et Ahmed (1990). Les spécimens étaient âgés de 31, 36, 56, 59 et 80 ans, ce qui ne couvrait peut-être pas le groupe *jeune* de l'étude comparative. Les deux études semblent avoir défini une lamelle de façon identique. Marchand et Ahmed (1990) ont défini une lamelle distincte comme une bande ou un groupe de bandes adjacentes regroupant les fibres ayant une orientation similaire. Cassidy *et al.* (1989, p. 79) mentionnent pour leur part : « In successive lamellae, the orientation of the fibers alternates with respect to the spinal axis ». Marchand et Ahmed (1990) rapportent que le nombre de lamelles au niveau L4–L5 est en moyenne seulement 6% plus grand qu'au niveau L2–L3. On pose donc ici l'hypothèse que la variation est aussi faible par rapport au niveau L1–L2, soit celui étudié par Cassidy *et al.* (1989). De plus, les spécimens ne révélaient aucune anomalie significative. Marchand et Ahmed (1990) ont signifié que leur décompte a probablement été sous-estimé en raison de la difficulté à identifier les lamelles dans la zone de transition entre l'anneau fibreux et le noyau pulpeux, étant donné l'état déshydraté des spécimens. Cassidy *et al.* (1989) ont aussi signifié la difficulté à différencier la lamelle adjacente au noyau pulpeux. La zone de transition a été localisée à environ 7 mm au site antérieur, à 8 mm au site latéral et à 6 mm au site postérieur, à partir de l'extérieur de l'anneau fibreux. Holzapfel *et al.* (2005) ont situé cette distance de transition à 3,9 mm en moyenne. À partir de cette distance, la faible organisation structurale du tissu ne permettait plus de préparer leurs échantillons d'essai de traction. La difficulté à identifier la zone de transition pourrait expliquer, en grande partie,



les écarts dans le dénombrement des lamelles. Une autre explication possible porterait sur les méthodologies différentes utilisées : Cassidy *et al.* (1989) ont examiné des sections de coupe des spécimens au microscope optique alors que Marchand et Ahmed (1990) ont examiné les échantillons à la suite d'une dissection, en séparant chaque lamelle manuellement, depuis la périphérie de l'anneau fibreux jusqu'au noyau pulpeux. Il est donc possible que la délimitation entre une lamelle et une autre n'ait pas été identifiée de façon similaire.

Les lamelles périphériques se distinguent des lamelles plus profondes, car elles chevauchent le rebord du corps vertébral en formant une courbure prononcée à 90° (Aspden *et al.*, 1981; Marchand et Ahmed, 1990; Nosikova *et al.*, 2012). Selon Marchand et Ahmed (1990), on en dénombre de six à huit et la quantité varie selon le site et l'âge, ce qui concorde avec les observations de Peacock (1952). La particularité de ces lamelles a poussé Klein *et al.* (1983) à suggérer que les lamelles périphériques ne travaillent pas en tension comparativement aux lamelles internes. Cette hypothèse reste encore à valider. Il est à préciser que ces lamelles sont incluses dans les décomptes présentés ci-dessus.

### **1.2.3.2 Épaisseur des lamelles**

L'épaisseur des lamelles de l'anneau fibreux est insensible au niveau du segment vertébral dans la région lombaire (Marchand et Ahmed, 1990). L'épaisseur est maximale au site latéral, et minimale au site postérieur pour les spécimens âgés (Cassidy *et al.*, 1989; Marchand et Ahmed, 1990), ce qui pourrait expliquer, en partie, pourquoi la rupture de l'anneau fibreux est plus probable dans la zone postérieure du disque. Pour les spécimens jeunes, cette tendance n'est pas mise en évidence ; l'épaisseur semble relativement constante selon la circonférence (Marchand et Ahmed, 1990). Radialement, l'épaisseur diminue avec l'éloignement des lamelles par rapport au noyau pulpeux (Marchand et Ahmed, 1990). Cassidy *et al.* (1989) n'ont toutefois observé cette tendance qu'au site antérieur. Holzapfel *et al.* (2005) n'ont pas observé de variation radiale de l'épaisseur, mais ils expliquent cette discordance avec les travaux de Marchand et Ahmed (1990) et de Cassidy *et al.* (1989) du fait qu'ils n'ont pas analysé l'anneau fibreux au-delà d'une profondeur de 3,9 mm en moyenne.

Les épaisseurs moyennes mesurées varient de 0,14 mm dans les lamelles extérieures à 0,20 mm dans les lamelles intérieures pour les disques du groupe *jeunes* (Marchand et Ahmed, 1990). Les épaisseurs moyennes passent de 0,33 mm dans les lamelles extérieures à 0,52 mm dans les lamelles intérieures pour les disques du groupe *vieux*. L'épaisseur des lamelles des vieux spécimens est donc environ deux fois supérieure à celle des lamelles des spécimens jeunes selon ces résultats. Les épaisseurs mesurées par Cassidy *et al.* (1989) varient entre 0,08 mm et 0,40 mm, avec une moyenne de 0,20 mm au site latéral et 0,14 mm au site postérieur. Les épaisseurs mesurées par Holzapfel *et al.* (2005) varient plutôt entre 0,14 mm et 1,10 mm. Ces derniers auteurs précisent toutefois que leurs résultats peuvent avoir été biaisés par une sélection préférentielle pour des lamelles plus épaisses en vue de leurs essais de traction.

Bien que, d'après ces études, il semble y avoir une variation circonférentielle de l'épaisseur des lamelles de l'anneau fibreux, les données disponibles ne sont pas suffisantes pour formuler une équation mathématique fiable, surtout pour les spécimens jeunes. Il en va de même pour la variation radiale, qui semble être présente seulement au site antérieur selon Cassidy *et al.* (1989), alors que les données de Marchand et Ahmed (1990) rapportent une variation généralisée sur tout l'anneau fibreux. Des études supplémentaires sont nécessaires pour appuyer ces résultats.

### 1.2.3.3 Orientation des fibres de collagène

L'organisation très ordonnée des fibres de collagène dans les lamelles de l'anneau fibreux a fait l'objet d'études histologiques par Cassidy *et al.* (1989), Marchand et Ahmed (1990) et Holzapfel *et al.* (2005). Ces trois études confirment que les fibres sont parallèles et inclinées au sein d'une même lamelle. De plus, l'inclinaison des fibres est alternée entre les lamelles adjacentes (se rapporter à la représentation de l'anneau fibreux à la figure 1.2). Dans les données qui suivent, l'inclinaison des fibres de collagène est donnée en degrés par rapport au plan transversal du disque intervertébral. Le plan transversal est normal à l'axe du rachis. Selon Cassidy *et al.* (1989), cet angle croît linéairement de 28° à 43° de l'extérieur vers l'intérieur de l'anneau fibreux. Leur étude révèle des données comparables entre les sites antéro-latéraux et postéro-latéraux. Holzapfel *et al.* (2005) ont observé une variation circonférentielle de l'angle

et une variation radiale négligeable. Ils formulent toutefois une réserve sur cette dernière observation puisque leur analyse s'est limitée à une profondeur de 3,9 mm à partir de la périphérie du disque intervertébral. Ils suggèrent une équation de la variation circonférentielle de l'angle, soit  $23,2 + 0,130 \vartheta$  (en degrés), où  $\vartheta$  est l'angle associé à la position circonférentielle ayant pour origine le site antérieur. Marchand et Ahmed (1990) appuient ces mesures en mentionnant que l'angle global est de  $30^\circ$ . Ils précisent cependant que l'angle des fibres au site postérieur atteint  $70^\circ$ . De plus, l'orientation des fibres est irrégulière à proximité des pédicules.

#### 1.2.3.4 Frisures des lamelles

Cassidy *et al.* (1989) ont observé la présence de frisures régulières dans les lamelles du disque intervertébral L3–L4 à l'état non sollicité. Ces frisures donnent aux lamelles l'allure d'un ruban ondulé. L'angle des frisures augmente en se rapprochant du noyau pulpeux alors que la période diminue linéairement. La longueur des frisures demeure constante. Cette caractéristique pourrait expliquer la zone de faible module d'élasticité notée au début de la courbe contraintes–déformations lors d'essais de traction sur des échantillons de lamelles de l'anneau fibreux. À mesure que les lamelles s'étirent, l'effet de flexion réduit l'amplitude des frisures jusqu'à ce que les lamelles agissent essentiellement en tension, d'où une plus grande rigidité dans les zones de grande déformation. Les variations régionales des frisures pourraient quant à elles expliquer les variations régionales des propriétés mécaniques des lamelles. Il est aussi avancé que la réorientation des fibres lors des déformations pourrait expliquer la non-linéarité de la rigidité des lamelles (Ambard et Cherblanc, 2009).

#### 1.2.3.5 Interactions interlamellaires

Des ponts fibreux interlamellaires ont été observés sur des modèles animaux (Pezowicz *et al.*, 2006; Melrose *et al.*, 2008; Schollum *et al.*, 2009; Han *et al.*, 2015), mais leur présence dans l'anneau fibreux humain n'a pas encore été démontrée dans la littérature. Ces ponts joueraient un rôle clé dans la prévention de la séparation des lamelles (Pezowicz *et al.*, 2006; Schollum *et al.*, 2009) et pourraient influencer la rigidité de l'ensemble des lamelles de l'anneau fibreux

(Luxmoore *et al.*, 2012). La résistance à la séparation des lamelles a été étudiée par Gregory *et al.* (2012) sur des échantillons de DIV lombaires humains.

L'interaction interlamellaire implique aussi la transmission de la pression depuis le noyau pulpeux vers l'extérieur de l'anneau fibreux. Le renflement de l'anneau fibreux, décrit à la section suivante, implique une déformation complexe des lamelles qui dépend du support offert par la matrice au voisinage des lamelles. Rodrigues *et al.* (2012) ont proposé un modèle descriptif de la géométrie déformée des lamelles près des plateaux vertébraux en tenant compte de ce support mutuel des lamelles. La déformation de chaque lamelle doit nécessairement être compatible avec celle des lamelles adjacentes tout en assurant l'équilibre des pressions de contact aux interfaces des lamelles.

#### **1.2.3.6 Renflement de l'anneau fibreux**

Sous l'effet des charges externes et en fonction de la posture, l'anneau fibreux subit un renflement, c'est-à-dire que la courbure longitudinale de l'anneau fibreux change, généralement en gonflant vers l'extérieur. On peut s'attendre à ce que la pression intradiscale influence le renflement par la mise en tension des fibres de collagène de l'anneau fibreux. À la suite d'expérimentations sur des spécimens humains cadavériques sains, Roaf (1960) explique que le renflement de l'anneau fibreux n'est pas une conséquence directe de la pression intradiscale. L'effet immédiat de la pression intradiscale est plutôt le renforcement du centre des plateaux vertébraux, causant un rapprochement périphérique des vertèbres du segment lombaire. Ce rapprochement périphérique des vertèbres crée à son tour le renflement latéral de l'anneau fibreux. Que le renflement soit directement ou non relié à la pression intradiscale, il demeure possible de déterminer une relation entre les deux pour un chargement en compression uniaxiale. Cette relation peut servir à la validation des modèles biomécaniques.

Wenger et Schlegel (1997) ont mesuré, par photogrammétrie, le renflement sur 16 segments lombaires soumis à une compression uniaxiale de 2500 N. Les éléments postérieurs des vertèbres ont été retirés, mais les ligaments ont été conservés sur les segments. Ils ont mesuré un

renflement moyen maximal de 1 mm aux sites postéro-latéraux. Les résultats montrent que le renflement diminue au voisinage du ligament longitudinal postérieur. Ces auteurs suggèrent que la prévalence de la hernie discale aux sites postéro-latéraux pourrait être associée au renflement accru en ces zones.

Heuer *et al.* (2008b) ont numérisé, à l'aide d'un capteur laser bidimensionnel, six segments lombaires L2–L3 âgés de 38 à 59 ans, dont deux étaient de sexe féminin et quatre de sexe masculin. Pour une première condition de test, les tissus mous ont été enlevés à l'exception des ligaments et des facettes articulaires. Pour une deuxième condition de test, les structures osseuses postérieures et les ligaments ont été enlevés. Les spécimens ont été testés en compression, en flexion, en extension, en flexion latérale, en torsion, en combinaison de torsion et de flexion latérale, en combinaison de torsion et de flexion sagittale et en combinaison de flexion latérale et d'extension. Sous une force de compression uniaxiale de 500 N, le renflement maximal, situé au voisinage du site antérieur, a augmenté de 0,7 mm pour la première condition de test et de 0,87 mm pour la deuxième condition de test. On remarque que l'arc vertébral et les ligaments jouent un rôle dans le renflement du disque.

O'Connell *et al.* (2010) ont mesuré le renflement de 20 disques intervertébraux L3–L4 et L4–L5 âgés de 22 à 80 ans, à partir d'imageries par résonance magnétique. Les muscles et les facettes articulaires sur ces segments lombaires ont été réséqués. Les disques en position neutre, en flexion et en extension ont été soumis à une charge en compression de 1000 N appliquée subitement puis maintenue pendant 20 minutes. Les postures en flexion et en extension ont été obtenues en ajoutant une cale en coin de 5° entre le segment et l'appareil de test. En position neutre, le renflement moyen a été mesuré à 0,41 mm à l'intérieur de l'anneau fibreux et à 0,48 mm à l'extérieur. Le fait que le renflement soit plus grand aux lamelles extérieures qu'aux lamelles intérieures indique que les lamelles extérieures ne sont probablement pas soumises à l'effet de la pression intradiscale et qu'elles ne sont de ce fait soumises qu'à de faibles contraintes de tension, ou peut-être uniquement à des contraintes en compression. La sous-section 1.2.3.1 a fait référence à la distinction des lamelles périphériques par rapport aux lamelles intérieures. Il serait pertinent de mesurer le renflement en plusieurs points à travers

l'épaisseur de l'anneau fibreux afin de vérifier sa relation avec la position radiale dans l'anneau fibreux. Ceci donnerait une meilleure indication quant au comportement attendu des contraintes à travers l'anneau fibreux.

Il est difficile de corrélérer les résultats de renflement, même avec des états similaires de résection. Est-ce que l'augmentation de 500% de la charge ne fait augmenter le renflement que de près de 15%, comme le laisserait croire la comparaison des études de Wenger et Schlegel (1997) et de Heuer *et al.* (2008b) ? Ceci serait plausible si le renforcement du centre des plateaux vertébraux (Roaf, 1960) avait un effet limité sur le renflement de l'anneau fibreux. La perte de liquide par le noyau pulpeux pourrait expliquer cet effet limité.

Les résultats de Heuer *et al.* (2008b) ne concordent pas avec ceux de O'Connell *et al.* (2010). Par contre, en comparant les résultats de O'Connell *et al.* (2010) avec ceux de Wenger et Schlegel (1997), une augmentation de 250% de la charge ferait augmenter le renflement de près de 145%. Les résultats de ces deux études peuvent donc paraître plus réalistes, mais il est important de noter que les écarts-types obtenus par Wenger et Schlegel (1997) sont très grands. Heuer *et al.* (2008b) n'indiquent pas les écarts-types de leurs résultats. Wenger et Schlegel (1997) et Heuer *et al.* (2008b) ont mesuré le renflement à l'extérieur du disque seulement. Un nombre accru de spécimens pourrait améliorer la fiabilité de ces résultats, et le renflement des lamelles intérieures devrait être mesuré par des techniques appropriées.

Notons finalement qu'un renflement a été observé par Marchand et Ahmed (1990) dans les disques au repos. La courbure forme des arcs de cercle au site antérieur alors qu'elle est plutôt irrégulière au site postérieur. Un renflement initial de 1 mm a été supposé par Ferguson *et al.* (2004), Chagnon *et al.* (2010) et Massey *et al.* (2011), mais cette valeur est arbitraire due à un manque de donnée dans la littérature. On peut s'attendre à ce que le renflement initial soit sujet à une grande variabilité interindividuelle, et à une variabilité importante selon la région du disque. La validation d'une mesure expérimentale du renflement au repos servirait à modéliser fidèlement l'anneau fibreux avant l'action d'une charge.

### 1.2.3.7 Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques de l'anneau fibreux ont fait l'objet de plusieurs études. Skaggs *et al.* (1994) et Holzapfel *et al.* (2005) ont mesuré les propriétés mécaniques de lamelles distinctes alors que d'autres ont étudié un groupe de lamelles (Galante, 1967; Elliott et Setton, 2001; O'Connell *et al.*, 2012). Holzapfel *et al.* (2005) soutiennent que les trois principaux paramètres propres aux lamelles et qui influencent le comportement mécanique de l'anneau fibreux sont les propriétés élastiques des lamelles, l'orientation des fibres dans les lamelles et la variation régionale de ces caractéristiques. Ceci semble juste dans la mesure où les frisures, telles que décrites par Cassidy *et al.* (1989), sont implicitement prises en compte dans les propriétés mécaniques.

Les essais de traction dans la direction des fibres ont démontré que les lamelles se comportent de façon hyperélastique, c'est-à-dire, dans ce cas-ci, que le module d'élasticité augmente avec la déformation. Les lamelles ont un comportement linéaire dans la direction transversale aux fibres (Holzapfel *et al.*, 2005), justifié par la sollicitation de la substance fondamentale de la matrice uniquement. Les lamelles superficielles sont entre deux et trois fois plus rigides en tension que les lamelles internes (Skaggs *et al.*, 1994; Holzapfel *et al.*, 2005), ce qui signifie que les propriétés mécaniques varient radialement. Cette variation radiale du module d'élasticité peut s'expliquer en tout ou en partie par les frisures dans les lamelles, présentées à la sous-section 1.2.3.4. Skaggs *et al.* (1994) ont mesuré une plus grande rigidité des lamelles au site antérieur qu'aux sites postéro-latéraux, alors que les résultats de Holzapfel *et al.* (2005) suggèrent qu'il n'y a pas de variation circonférentielle significative. La prépondérance des affections aux sites postéro-latéraux et au site postérieur serait attribuable à des irrégularités structurales plutôt qu'à des variations des propriétés mécaniques (Holzapfel *et al.*, 2005). Ces irrégularités dans la structure de l'anneau fibreux sont rapportées par Marchand et Ahmed (1990). Holzapfel *et al.* (2005) suggèrent que les différences entre leurs résultats et ceux de Skaggs *et al.* (1994) sont dues au fait que ces derniers ont réalisé les essais de traction sur des spécimens congelés et que cela peut influencer le comportement mécanique. Selon Holzapfel *et al.* (2005), la définition du module tangent utilisé par Skaggs *et al.* (1994) est douteuse et contradictoire. Selon cette dé-

finition, deux matériaux ayant une courbe contraintes–déformations identique, mais ayant une limite de déformation élastique différente, ont un module tangent différent, du fait que ce module est calculé à 75% de la limite de déformation élastique. Il est toutefois difficile d’invalider les résultats de Skaggs *et al.* (1994) en se basant simplement sur cet argument, étant donné que les échantillons des sites antérieurs sont ceux ayant à la fois la plus petite limite de déformation élastique et le plus grand module tangent. Le petit échantillonnage et la grande variabilité interindividuelle peuvent induire des écarts significatifs dans ces études. D’autres études sont nécessaires afin de conclure sur la variation circonférentielle des propriétés mécaniques des lamelles de l’anneau fibreux.

La figure 1.3 présente les courbes contraintes–déformations tracées à partir des résultats moyens des essais de traction effectués par Holzapfel *et al.* (2005), dans la direction des fibres. Ces courbes rendent bien compte de l’hyperélasticité des lamelles. Transversalement, Holzapfel *et al.* (2005) ont mesuré un module d’élasticité égal à 0,22 MPa et ont remarqué un comportement pratiquement linéaire. Les spécimens ont subi une elongation allant de 25% à 70% avant la rupture, ce qui couvre amplement l’étendue des allongements avant rupture des spécimens durant l’essai de traction dans la direction des fibres. Il est important de noter que seulement sept spécimens ont été testés transversalement et que des essais supplémentaires sont requis pour déterminer cette valeur avec plus de certitude.

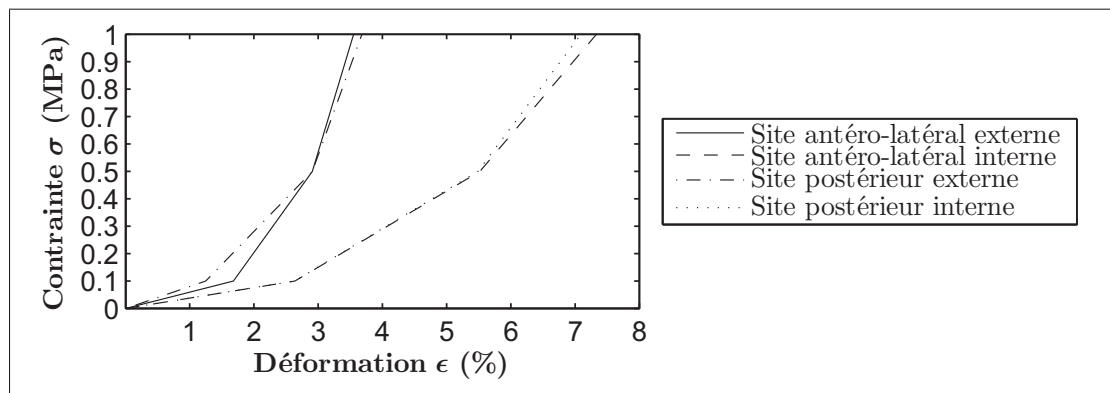


Figure 1.3 Courbes  $\sigma - \epsilon$  tirées des données expérimentales de Holzapfel *et al.* (2005)



Les études rapportées précédemment caractérisent les lamelles sans tenir compte des modes de chargement réels dans l'anneau fibreux. In situ, les lamelles sont ancrées dans les plateaux vertébraux. Or, en essai de traction uniaxiale, les extrémités libres du spécimen de test faussent l'allongement des fibres de collagène par rapport au chargement in situ (O'Connell *et al.*, 2012). Ce type d'essai n'est donc pas nécessairement adéquat pour un état de déformation correspondant à un chargement biaxial ou incluant du cisaillement (Bursa *et al.*, 2008; Guo *et al.*, 2012). Face à cette problématique, les chercheurs se tournent dorénavant vers des tests de traction biaxiale (Wagner et Lotz, 2004; Bursa *et al.*, 2008; O'Connell *et al.*, 2012), représentant mieux le mode de chargement des lamelles de l'anneau fibreux. À partir d'un tel test, il est possible de formuler un modèle constitutif de l'anneau fibreux permettant de tenir compte à la fois de l'énergie de déformation de la matrice, des fibres, et de l'interaction entre les fibres et la matrice (se référer à la sous-section 1.5.2 pour plus de détails à ce sujet). O'Connell *et al.* (2012) ont observé que le module d'élasticité dans la direction circonférentielle était similaire entre les tractions uniaxiales et biaxiales, avec une valeur de 21,0 MPa en traction uniaxiale. Cependant, ils ont démontré qu'un essai de traction biaxiale était nécessaire pour déterminer adéquatement le module d'élasticité dans la direction longitudinale, car celui-ci diffère grandement selon le type d'essai. Le module d'élasticité longitudinal mesuré en traction biaxiale est de 12,5 MPa. Le module de cisaillement a été mesuré à 9,64 MPa.

#### **1.2.4 Vertèbres lombaires, sacrum et plateaux vertébraux**

Les vertèbres sont constituées d'os spongieux contenu à l'intérieur d'os compact (ou os cortical). Elles sont rigides en comparaison aux tissus environnants. Les vertèbres lombaires sont les plus volumineuses de toutes. La figure 1.4 montre l'anatomie d'une vertèbre lombaire. Vue de dessus, le corps vertébral (1) prend la forme d'une graine de haricot. Comme discuté à la sous-section 1.2.1, sa géométrie s'apparente à une ellipse à la jonction du DIV L5–S1. Deux lames (2) et deux pédicules (3) composent l'arc vertébral, formant le foramen vertébral (4) servant à protéger la moelle épinière. Les apophyses transverses (5), les apophyses articulaires supérieures (6), les apophyses articulaires inférieures (7), l'apophyse épineuse (8) et les tuber-

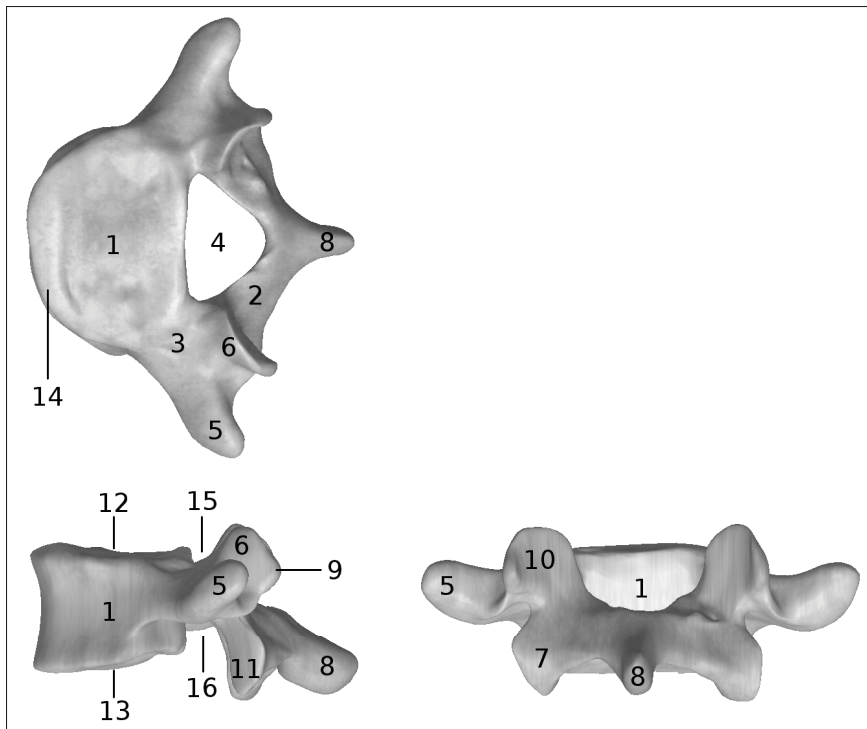


Figure 1.4 Anatomie d'une vertèbre lombaire. Cette figure montre la vue de dessus (en haut), la vue sagittale (à gauche) et la vue postérieure (à droite).

cules mamillaires (9) servent de siège aux fovéas articulaires (10, 11) et de points d'ancrage aux muscles du dos. Les surfaces articulaires intervertébrales (12, 13) sont composées de cartilage hyalin et on les distingue des vertèbres par l'appellation *plateaux vertébraux*. Les plateaux vertébraux sont moins rigides que les corps vertébraux et servent d'ancrage aux lamelles du disque intervertébral. L'ancrage des lamelles est assuré par des liens fibreux appelés *arborescences de Sharpey*, présentés à la sous-section 1.2.5. Au pourtour des plateaux vertébraux se trouve l'épiphyse annulaire (14), composée d'os compact. Par superposition des vertèbres, il se crée un contact entre les vertèbres aux fovéas articulaires. Les incisures vertébrales (15, 16) forment alors un canal appelé foramen intervertébral. Il est important de noter que la cinquième vertèbre lombaire se distingue des autres par une forte angulation entre les surfaces articulaires intervertébrales supérieure et inférieure (non représenté à la figure 1.4).

Le sacrum constitue, avec le coccyx, la queue de la colonne vertébrale, tel que montré à la figure 1.5. Il forme la partie postérieure du bassin et présente une série de foramina permettant aux racines nerveuses de l'extrémité de la moelle épinière d'innervier les membres inférieurs. Les cinq vertèbres qui composent le sacrum en un ensemble rigide marquent l'absence de disques intervertébraux dans cette région. Son extrémité supérieure se nomme la *base* du sacrum (basis ossis sacri), sur lequel se retrouve un plateau vertébral. Son extrémité inférieure se nomme le *sommet inférieur* (apex ossis sacri).

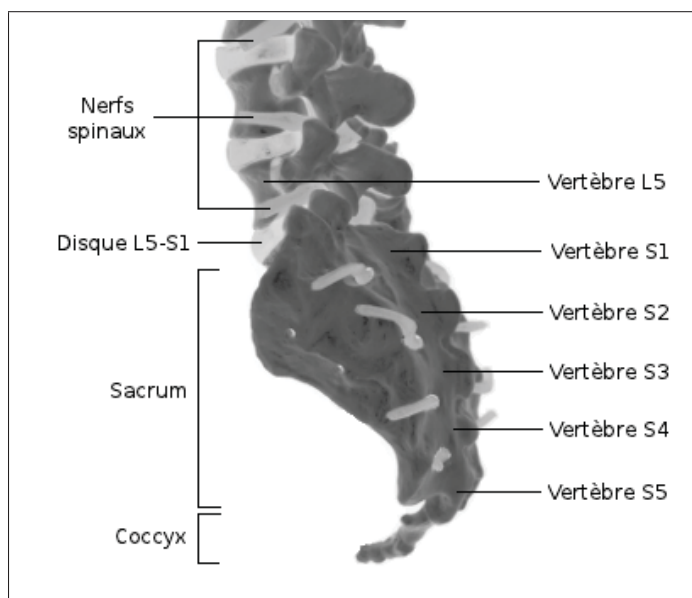


Figure 1.5 Vue postéro-latérale du sacrum

### 1.2.5 Arborescences de Sharpey

Les arborescences de Sharpey assurent l'ancrage des lamelles de l'anneau fibreux dans les plateaux vertébraux. Pour certains auteurs, elles se limitent aux fibres d'ancrage des lamelles superficielles de l'anneau fibreux à l'épiphyse annulaire des vertèbres (Eijkelkamp, 2002; Karajan, 2012). Pour d'autres, elles englobent les fibres d'ancrage de toutes les lamelles de l'anneau fibreux et de la zone superficielle du noyau pulpeux (Johnson *et al.*, 1982). L'analyse de l'interface entre les disques intervertébraux et les plateaux vertébraux a révélé que les fibres

des lamelles intérieures, c'est-à-dire près du noyau pulpeux, s'insèrent dans la région calcifiée du plateau, tandis que les lamelles extérieures s'insèrent soit dans la région calcifiée, soit en périphérie du plateau en formant un coude à 90°.

À la suite d'observations au microscope optique de segments lombaires ovins, Rodrigues *et al.* (2012) ont décrit la déformation des lamelles dans les zones près des plateaux vertébraux. Ils expliquent que la matrice de collagène et les fibres obliques adjacentes aux fibres d'une lamelle apportent du support latéral au point d'insertion des arborescences de Sharpey, de telle sorte que les fibres des lamelles subissent une flexion modérée plutôt qu'une flexion concentrée au point d'insertion. La courbure des lamelles près des plateaux vertébraux est donc atténuée par l'effet de support des lamelles adjacentes. Il n'y a toutefois aucune mesure quantitative disponible actuellement dans la littérature sur l'ampleur des atténuations ni sur les rayons de courbure des lamelles dans le plan sagittal. La littérature actuelle est somme toute limitée sur les arborescences de Sharpey des disques intervertébraux. Il est cependant reconnu qu'elles soient suffisamment résistantes pour causer l'avulsion des plateaux vertébraux (Bonneville *et al.*, 1989). Elles restreignent l'expansion radiale des lamelles, jouant ainsi un rôle important sur le renflement du disque. Dans le jargon de la mécanique du solide, elles créent des effets de discontinuité, c'est-à-dire des efforts qui contraignent l'expansion des lamelles aux plateaux vertébraux, tel un couvercle fermant l'extrémité d'un réservoir sous pression.

### 1.2.6 Moelle épinière et nerfs spinaux

La moelle épinière permet la transmission de l'influx nerveux entre le cerveau et les nerfs rachidiens. Elle s'étend du bulbe rachidien, à hauteur de la première vertèbre cervicale, jusqu'à la deuxième vertèbre lombaire. À ce niveau, elle est prolongée par le *filum terminal* (Delamarche *et al.*, 2002) pour former, avec les racines nerveuses lombaires et sacrées, la queue de cheval. De part et d'autre de chaque vertèbre, le regroupement des racines nerveuses antérieure et postérieure forme un nerf spinal (ou nerf rachidien) (Delamarche *et al.*, 2002). Celui-ci rejoint le foramen vertébral en passant par un foramen intervertébral pour s'unir à la moelle épinière. La figure 1.5 montre des nerfs spinaux des niveaux L3, L4 et L5 sortant des foramina inter-

vertébraux. Le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de Netter (2006) pour des illustrations détaillées de la moelle épinière et du réseau nerveux des régions lombaire et sacrée.

### 1.2.7 Ligaments

Les ligaments présents dans la colonne sont le ligament longitudinal antérieur (LLA), le ligament longitudinal postérieur (LLP), les ligaments jaunes (ligamenta flava), les ligaments interépineux (LIE), le ligament supraépineux (LSE) et les ligaments intertransversaires (LIT). Ils sont constitués principalement de fibres de collagène de type I et de fibres élastiques intégrées à une matrice extracellulaire hydratée (Johnson *et al.*, 1982; Kurtz et Edidin, 2006). Le LLA, large, et le LLP, plus étroit, s'étendent du cou jusqu'au sacrum. Le LLA s'attache aux vertèbres et à l'anneau fibreux des DIV alors que le LLP ne s'attache qu'à l'anneau fibreux. Leur structure à fibres unidirectionnelles ondulées s'aligne au fur et à mesure que la force de traction augmente, leur conférant une grande résistance mécanique tout en permettant une elongation substantielle. Le LLA résiste à l'extension de la colonne et le LLP résiste à la flexion de la colonne. La résistance du LLA est de 8,2 MPa alors que celle du LLP est de 19,7 MPa, au niveau L5–S1 (Pintar *et al.*, 1992). La force de rappel exercée par ces ligaments lors des mouvements de flexion et d'extension peut protéger les fibres de l'anneau fibreux en limitant l'amplitude de mouvement (Hukins et Meakin, 2000). Des ligaments jaunes relient les lames de chaque paire de vertèbres superposées. Ces derniers agissent de concert avec le LLP lors de la flexion de la colonne (Johnson *et al.*, 1982), offrant ainsi un potentiel de protection de la région postérieure de l'anneau fibreux (Hukins et Meakin, 2000). La haute teneur en fibres élastiques de ces ligaments (Johnson *et al.*, 1982) leur permet l'extension nécessaire malgré leur position éloignée de l'axe de flexion. Leur allongement à la rupture est plus de trois fois supérieur à celui du LLP (Pintar *et al.*, 1992; Hukins et Meakin, 2000). Les LIE relient les apophyses épineuses à la manière d'un éventail. Leurs fibres de collagènes sont parallèles aux apophyses épineuses, ce qui offre peu de résistance à la flexion. Le LSE s'étend de la base du cou jusqu'à la colonne lombaire. Il est très extensible, et agirait plus comme coussinet qu'élément structural (Hukins et Meakin, 2000). Les LIT relient les apophyses transverses et sont minces dans la

région lombaire. Pour des illustrations des ligaments, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de Moore et Dalley (2001).

### **1.3 Dégénérescences du disque intervertébral L5–S1**

La dégénérescence du disque intervertébral est définie par Adams et Roughley (2006) comme un processus anormal de détérioration à la suite d'un dommage structural progressif. La dégénérescence est irréversible dans les disques adultes, car les dommages structuraux nuisent au transport des métabolites. Les efforts excessifs sont à l'origine de ces dommages (Adams et Roughley, 2006; Lauerman et Graw, 2008).

Les prochaines sous-sections présentent la hernie discale et ses principales causes documentées, puis décrivent les stades de dégénérescence selon les classifications adoptées dans la littérature.

#### **1.3.1 Description de la hernie discale**

Dans un disque sain, l'anneau fibreux contient le noyau pulpeux, à la manière d'une paroi de réservoir qui contient un fluide pressurisé. Lorsque l'anneau est sévèrement fissuré, il échappe à ce rôle, laissant place à la formation d'une hernie. La hernie discale se définit comme la migration du noyau pulpeux à travers des fissures radiales de l'anneau fibreux, jusqu'au point d'affecter la périphérie du disque intervertébral (Adams et Roughley, 2006). Les conditions favorables à provoquer une hernie discale sont des combinaisons de chargements importants en compression, en flexion (sagittale ou latérale), et en torsion (Roaf, 1960; Gunzburg *et al.*, 1992; Adams et Roughley, 2006). Une charge en compression pure n'est pas connue comme étant une cause de rupture de l'anneau fibreux. La compression excessive provoque plutôt la fracture des plateaux vertébraux et de l'os spongieux des vertèbres (Roaf, 1960; Hickey et Hukins, 1980).

La hernie discale se produit le plus souvent aux sites postéro-latéraux (Skaggs *et al.*, 1994; Lauerman et Graw, 2008). Quelques hypothèses, dont les suivantes, tentent d'expliquer cette observation : le ligament longitudinal postérieur est plus faible aux sites postéro-latéraux (Lauer-

man et Graw, 2008) ; en compression, le gonflement latéral est accru aux sites postéro-latéraux (Wenger et Schlegel, 1997), ce qui semble indiquer que l’anneau fibreux est moins bien contenu par les ligaments en ces zones ; les irrégularités structurales sont en plus forte concentration aux sites postéro-latéraux (Marchand et Ahmed, 1990) ; la faible hauteur du disque L5–S1 aux sites postéro-latéraux et postérieur, combinée à la forte sollicitation en flexion sagittale, imposent des déformations relativement importantes dans les fibres en ces zones, au point d’annuler le renflement (Gunzburg *et al.*, 1992).

La douleur provoquée par la hernie discale est multifactorielle. Elle implique la stimulation des extrémités nerveuses localisées à la périphérie de l’anneau fibreux, la compression du sac dural et des nerfs spinaux et des réactions inflammatoires (Bendo et Awad, 2006; Raj, 2007). En plus de douleurs, des troubles moteurs parfois importants peuvent survenir en conséquence de la compression des nerfs.

### **1.3.2 Classification des dégénérescences du noyau pulpeux**

La condition du noyau pulpeux a été classifiée en trois catégories selon son aspect macroscopique (Osti *et al.*, 1992). Le grade 1 correspond à un noyau pulpeux normal, de consistance aqueuse, et blanchâtre, ayant une démarcation nette avec l’anneau fibreux. Le grade 2 correspond à une dégénérescence modérée, où la démarcation avec l’anneau fibreux est moins nette. La couleur d’un noyau pulpeux de grade 2 est plus foncée que celle d’un grade 1 et sa consistance est plus solide. Un noyau pulpeux de grade 3 est indissociable de l’anneau fibreux, il est solide, friable, brunâtre et s’étend à travers des déchirures de l’anneau fibreux.

### **1.3.3 Classification des dégénérescences de l’anneau fibreux**

Les lésions du DIV peuvent être contenues ou non. Dans le deuxième cas, on parle de hernies discales. Les dégénérescences du DIV sont classées selon quatre ou cinq grades, selon la classification utilisée. Selon Raj (2007), on distingue quatre grades (de 0 à 3). Le grade 0 correspond à un disque sain. Le grade 1 correspond à une déchirure radiale se propageant à travers

environ un tiers des lamelles à partir du noyau pulpeux. Le grade 2 correspond à une déchirure radiale complète de l'anneau fibreux sans saillie, alors que le grade 3 correspond à une saillie de l'anneau fibreux jumelée à une rupture du LLP, pouvant aussi inclure une hernie discale. Selon Thompson *et al.* (1990), la classification se décline en cinq grades, chacun incluant une description pour le noyau pulpeux, l'anneau fibreux, les plateaux vertébraux et les vertèbres. Il est donc important d'identifier la classification utilisée lors de l'appellation des grades.

Une autre classification, appelée *classification de Dallas* et destinée à la tomodensitométrie, a été élaborée pour déterminer la sévérité des déchirures de l'anneau fibreux (Sachs *et al.*, 1987). Cette classification a par la suite été modifiée pour regrouper six catégories (Raj, 2007), que nous appellerons *grade CT* pour les distinguer des quatre grades présentés précédemment. Le grade CT 0 correspond à un disque sain. Le grade CT 1 correspond à une déchirure radiale confinée dans le premier tiers de l'épaisseur de l'anneau fibreux à partir du noyau pulpeux. Le grade CT 2 est une propagation du grade CT 1 jusqu'aux deux tiers de l'anneau fibreux. Le grade CT 3 correspond à une déchirure radiale complète de l'anneau fibreux sans saillie. Celle-ci peut occasionner des douleurs dues à l'innervation des couches externes de l'anneau fibreux. Le grade CT 4 est qualifié par une propagation du produit de contraste sur au moins 30° de la circonférence externe de l'anneau fibreux. Le grade CT 5, le plus sévère, correspond à la fuite du produit de contraste jusque dans l'espace péri-dural. On peut donc associer la hernie discale au grade CT 5.

En plus des lésions radiales, deux autres types de défauts ont été décrits par Osti *et al.* (1992) : les lésions périphériques et les lésions circonférentielles. Une lésion périphérique est une déchirure ponctuelle située près des plateaux vertébraux, sur les lamelles externes, et qui serait provoquée par un traumatisme. Cette lésion serait donc indépendante de la classification des dégénérescences présentée précédemment. Elle mène généralement à des lésions circonférentielles. Une lésion circonférentielle est une séparation, ou un décollement des lamelles, et constitue le défaut le plus fréquemment observé parmi les 135 échantillons cadavériques de Osti *et al.* (1992), aux sites antérieurs et postérieurs. Ce type de lésion a fait l'objet d'une étude expérimentale sur des anneaux fibreux lombaires humains par Gregory *et al.* (2012). Quant



aux lésions radiales, Osti *et al.* (1992) ont observé qu'elles se propagent dans un plan parallèle ou oblique aux plateaux vertébraux et presque exclusivement dans la région postérieure. Les échantillons ont tous été coupés dans des plans parallèles au plan sagittal, ce qui aurait pu compromettre l'observation de lésions radiales situées dans ces plans.

Ces classifications et types de lésions démontrent qu'une hernie discale peut être latente et se manifester brusquement à la suite de l'accumulation de dommages. Il est donc important de comprendre ce qui risque d'amorcer les lésions, et de connaître les conditions favorables à minimiser la propagation des lésions. La dégénérescence du noyau pulpeux survient habituellement avec l'âge (Raj, 2007), alors que les lésions de l'anneau fibreux peuvent être d'origine accidentelle ou dues à des mouvements répétés (Adams et Roughley, 2006). Selon Adams et Hutton (1985), les disques âgés sont moins sujets aux fuites du noyau pulpeux, ce qui pourrait s'expliquer du fait qu'un noyau pulpeux solide génère moins de pression hydrostatique et ne s'écoule pas. En vue de prévoir les risques en milieu de travail, il convient donc d'étudier les contraintes dans l'anneau fibreux en supposant un noyau pulpeux de grade 1, soit normal.

#### **1.4 Revue des modèles biomécaniques analytiques**

Hickey et Hukins (1980) ont développé un modèle analytique basé sur les équations des réservoirs cylindriques à paroi épaisse pour prédire le comportement du disque intervertébral soumis à une force de compression. L'avantage de cette approche est que l'anneau fibreux est entièrement considéré à l'aide de seulement trois équations de contraintes. Par contre, sa limitation majeure est que le renflement latéral ne peut pas être pris en compte, ce qui mène à un calcul de contraintes non réaliste.

Plus tard, Klein *et al.* (1983) ont formulé un modèle reposant entièrement sur des hypothèses géométriques pour calculer l'allongement des fibres de collagène tout en considérant le renflement du disque, pour un cas de chargement de compression axiale. En supposant qu'une fraction de volume du noyau pulpeux doit être accommodée par le renflement du disque, l'al-

longement requis des fibres a été calculé. Le reste du volume a été accommodé par la déformation des plateaux vertébraux et par le transfert de liquide entre le noyau pulpeux et les vertèbres. Le fondement de ce modèle est très fragile puisqu'il est difficile d'estimer le volume de liquide transféré aux vertèbres et de calculer analytiquement l'augmentation de volume offerte par la déformation des vertèbres. Cette approche leur a cependant permis d'utiliser facilement un profil transversal elliptique.

McNally et Arridge (1995) ont développé un modèle sur des bases beaucoup plus solides : l'équilibre des forces et la théorie des membranes. Bien qu'il soit limité à une géométrie axisymétrique à une seule lamelle, ce modèle a le mérite de tenir compte du renflement et de calculer les contraintes circonférentielles et longitudinales. L'étude s'est ensuite concentrée sur une fibre seule pour en calculer les forces de tension en fonction de l'orientation initiale de la fibre. Ce modèle ne tient pas compte de l'interaction des fibres avec la matrice et ne saurait prédire le comportement d'un disque à plusieurs lamelles. De plus, les déplacements ne sont pas imposés aux fibres de Sharpey, ce qui n'assure pas la conformité de la géométrie.

Prud'Homme (2008) a repris la théorie des réservoirs sous pression dans sa modélisation. Afin de modéliser le profil transversal elliptique, il a calculé les contraintes à l'aide des équations de réservoirs à paroi épaisse pour un rayon correspondant au demi-petit axe de l'ellipse, puis pour un rayon correspondant au demi-grand axe de l'ellipse. Il s'agit donc d'une simplification offrant une solution approximative pour le site antérieur, le site postérieur et les sites latéraux. Le renflement latéral n'a pas été pris en compte. Afin de proposer une avenue pour le développement d'un modèle permettant le calcul des contraintes dans un disque en flexion, les fibres de collagène ont été considérées comme parallèles à l'axe du rachis. Les allongements des fibres ont été calculés puis les contraintes ont été déduites d'une courbe contrainte-déformation non linéaire.

Afin d'étudier les mécanismes de rupture dans l'anneau fibreux, Iatridis et ap Gwynn (2004) ont modélisé l'anneau fibreux par une plaque stratifiée et utilisé la théorie des matériaux composites pour calculer les contraintes dans chaque lamelle à partir d'une matrice de rigidité

en traction, d'une matrice de rigidité en flexion et d'une matrice de couplage. Leur objectif n'étant pas de représenter le comportement d'un disque entier, certaines modifications doivent être apportées pour intégrer leur approche dans un modèle complet. D'abord, cette approche ne tient pas compte de la géométrie réelle du disque intervertébral puisque la plaque est plane. En second lieu, elle suppose qu'il n'y a aucun glissement entre les lamelles. Or, les études histologiques publiées à ce jour ne permettent pas d'affirmer avec certitude que les lamelles interagissent comme si elles étaient parfaitement collées. Cassidy *et al.* (1989) et Marchand et Ahmed (1990) affirment qu'il n'y a pas de connexions ou liens entre les lamelles de l'anneau fibreux alors que Williams et Park (2008) soutiennent qu'il y en a, sans toutefois en préciser l'importance ni le rôle biomécanique. Mentionnons également que Holzapfel *et al.* (2005, p. 126) laissent entendre que ces connexions existent : « Although structural contributions, which may occur through interactions and intersections between layers and/or connections between layers, are also important in disc function [...] ». Ces derniers n'indiquent cependant aucune donnée quantitative ni qualitative à cet effet. Le modèle de Iatridis et ap Gwynn (2004) a calculé les contraintes à partir d'une déformation arbitraire et non pas à partir d'un chargement déterminé. Cela nécessite donc de corréler le chargement avec la déformation pour ensuite calculer l'état de contrainte. Leur modèle demeure néanmoins très intéressant d'un point de vue fondamental, car il suggère l'intégration plus détaillée de la structure et des propriétés mécaniques du disque intervertébral.

Plus récemment, Ngwa et Agyingi (2011) ont élaboré un modèle mathématique faisant intervenir l'équilibre statique d'un ensemble de membranes fibreuses soumis à une pression intradiscale et une pression décroissante dans l'anneau fibreux. Ils ont considéré que la matrice et les fibres de l'anneau fibreux étaient indépendantes, suivant l'hypothèse que la matrice ne peut pas soutenir de charge en tension. Les lamelles ont donc été considérées comme des membranes formées de fibres capables de soutenir les forces de traction dans la direction des fibres uniquement. Cette hypothèse est discutable si l'on se fie aux résultats des essais de traction biaxiale (O'Connell *et al.*, 2012) dont il a été mention à la sous-section 1.2.3.7. De plus, la tension dans une fibre a été considérée comme constante sur toute sa longueur. Il s'agit d'une hypothèse

aussi discutable étant donné les interactions interlamellaires et la géométrie complexe que peut prendre les lamelles due aux grandes déformations (Rodrigues *et al.*, 2012). Ce modèle demeure intéressant par son originalité et sa prédiction adéquate, d'un point de vue qualitatif, des déplacements d'une fibre.

Il est intéressant de noter que toutes ces études, à l'exception de celle de Iatridis et ap Gwynn (2004), ont remplacé le noyau pulpeux par une pression hydrostatique. De plus, elles ont simulé le comportement *quasi statique* du disque intervertébral.

Dans le domaine des réservoirs sous pression à vocation industrielle, les réservoirs à plusieurs couches ont été étudiés (Adali *et al.*, 1995; Naga et Mokhtar, 2005; Jahed *et al.*, 2006), mais les théories développées sont limitées à une géométrie cylindrique ou sphérique soumise à de petites déformations ou à des déformations plastiques. Ces travaux ne sont pas adaptés pour tenir compte de la géométrie variable de l'anneau fibreux, ni des grandes déformations élastiques.

## 1.5 Revue des modèles biomécaniques numériques par éléments finis

Les modèles d'analyse par éléments finis visant l'étude des DIV sont nombreux et leur formulation varie grandement. Les objectifs spécifiques de chaque étude orientent le choix du type d'analyse, des composants à inclure, des simplifications géométriques, des propriétés des matériaux, des types d'éléments et des hypothèses simplificatrices. Un compromis doit également être fait au regard du niveau de réalisme et de la puissance de calcul. Bien que le but général des études numériques soit de mieux comprendre les mécanismes de lésion et de dégénérescence du rachis, les objectifs spécifiques de chacune sont variés. Certaines visent à évaluer l'influence des propriétés des matériaux et des dégénérescences sur le comportement mécanique du rachis (Heuer *et al.*, 2008a; Malandrino *et al.*, 2009; Schmidt *et al.*, 2009; Chagnon *et al.*, 2010; Galbusera *et al.*, 2011a,b) ou à étudier la réponse du rachis lorsqu'il est soumis à divers chargements (Shirazi-Adl *et al.*, 1984; Natarajan *et al.*, 2008; Kamińska *et al.*, 2010; Moramarco *et al.*, 2010). D'autres cherchent à valider, ou à optimiser, les paramètres des

modèles constitutifs dans des conditions particulières (Schroeder *et al.*, 2008; Wagnac *et al.*, 2011), ou à développer des procédures de calibration plus fiables (Ezquerro *et al.*, 2011). Ces études impliquent toutes une ou plusieurs formes de non-linéarité parmi les suivantes :

- a. relations contraintes-déformations non linéaires pour certains matériaux,
- b. grandes déformations des tissus,
- c. éléments avec changement d'état (ex. : éléments de contact).

Ces trois conditions sont indépendantes et sont souvent réunies.

### 1.5.1 Types d'analyse, géométrie et types d'éléments

Les analyses sont habituellement de type statique (ou quasi statique), dynamique (incluant les impacts et le fluage), et cyclique (étude de fatigue). La géométrie des composants est générée à l'aide de reconstitutions tridimensionnelles d'images obtenues par tomodensitométrie, ou modélisée par une approche ascendante à partir de mesures anthropométriques. Ces reconstitutions sont habituellement spécifiques à un individu, mais peuvent faire l'objet d'analyses statistiques (Peloquin *et al.*, 2014). Les modèles incluent au moins le noyau pulpeux et l'anneau fibreux, auxquels peuvent s'ajouter les plateaux vertébraux, les vertèbres, les ligaments et les muscles, selon les besoins de l'étude. Niemeyer *et al.* (2012) ont démontré que les paramètres liés au DIV sont ceux ayant le plus d'influence sur le comportement d'un segment vertébral. Ils ont conclu que la modélisation du DIV seul peut être, pas sa simplicité, plus bénéfique que la modélisation d'un segment complet.

Le noyau pulpeux peut être représenté de diverses façons : soit par une pression hydrostatique, soit par des éléments fluides, soit par des éléments solides. L'anneau fibreux est généralement modélisé à l'aide d'éléments solides, d'éléments coques ou d'une combinaison d'éléments solides et d'éléments barres représentant respectivement la matrice et les fibres de collagène. Les tableaux 1.1 et 1.2 classent quelques études selon les types d'éléments et matériaux utilisés pour le noyau pulpeux et l'anneau fibreux, respectivement. Comme cette thèse est concernée par un chargement quasi statique, les travaux recensés sont majoritairement de ce type. Pour les

Tableau 1.1 Classification de quelques études d'éléments finis selon les types d'éléments et matériaux utilisés pour le noyau pulpeux

Références	Éléments	Matériau
Shirazi-Adl <i>et al.</i> (1984)*	Non disponible	Incompressible
Dreischarf <i>et al.</i> (2011, 2012)*	Fluides hydrostatiques	Incompressible
Eberlein <i>et al.</i> (2004)*	Fluides hydrostatiques	Incompressible
Rohlmann <i>et al.</i> (2009)*	Fluides hydrostatiques	Incompressible
Wang <i>et al.</i> (2012)*	Fluides hydrostatiques	Non disponible
Zander <i>et al.</i> (2010)*	Fluides hydrostatiques	Incompressible
Ayturk <i>et al.</i> (2010)*	Hexaèdres	Élastique (linéaire)
Ezquerro <i>et al.</i> (2011)*	Hexaèdres	Mooney-Rivlin
Jacobs <i>et al.</i> (2014)**	Hexaèdres	Holmes-Mow
Moramarco <i>et al.</i> (2010)*	Hexaèdres	Néo-Hooke
Schmidt <i>et al.</i> (2007b, 2009)*	Hexaèdres	Mooney-Rivlin
Wagnac <i>et al.</i> (2011)**	Hexaèdres	Mooney-Rivlin
Kuo <i>et al.</i> (2010)*	Tétraèdres	Élastique (linéaire)

\*Étude quasi statique ; \*\*Étude dynamique

analyses dynamiques et en fatigue, des matériaux poroélastiques biphasés sont plus largement utilisés puisqu'ils permettent de simuler les transferts de fluide entre le noyau pulpeux, l'anneau fibreux et les plateaux vertébraux. Ces modèles ont l'avantage de pouvoir simuler également des chargements quasi statiques à la suite de la relaxation des contraintes (Swider *et al.*, 2010).

Les éléments fluides hydrostatiques incompressibles sont largement utilisés pour la modélisation du noyau pulpeux dans les études quasi statiques. Pour l'anneau fibreux, l'utilisation d'éléments solides est largement répandue. Ce type d'éléments confère à l'anneau fibreux une capacité substantielle à résister à la compression axiale, contrairement à des éléments coques/membranes et barres. La forte teneur en protéoglycanes de l'anneau fibreux implique qu'il puisse supporter une partie des forces axiales de compression (Noailly *et al.*, 2011). Cependant, il n'est pas clair si cette propriété doit être attribuée à l'ensemble fibres-matrice ou à la matrice seulement. Comme les fibres de collagène ne résistent qu'à la traction, il serait raisonnable de supposer que, dans un DIV sain, les lamelles soient assimilées à des membranes ne travaillant qu'en tension et confinant l'hydratation de la matrice extracellulaire.

Tableau 1.2 Classification de quelques études d'éléments finis selon les types d'éléments et matériaux utilisés pour l'anneau fibreux

Références	Éléments	Matériau
<i>Matrice et fibres modélisées comme continuum</i>		
Ayturk <i>et al.</i> (2010)	Hexaèdres	Yeoh
Eberlein <i>et al.</i> (2004)	Hexaèdres	
Matrice :		Néo-Hooke
Fibres :		Exponentielle (Holzapfel et Casser, 2000)
Moramarco <i>et al.</i> (2010)	Hexaèdres	
Matrice :		Yeoh
Fibres :		Exponentielle (Holzapfel et Casser, 2000)
<i>Matrice et fibres modélisées séparément</i>		
Shirazi-Adl <i>et al.</i> (1984)		
Matrice :	Hexaèdres	Élastique (linéaire)
Fibres :	Barres	Hypoélastique
Dreischarf <i>et al.</i> (2011, 2012)		
Matrice :	Hexaèdres	Néo-Hooke
Fibres :	Barres	Non linéaire
Ezquerro <i>et al.</i> (2011)		
Matrice :	Hexaèdres	Semblable à Yeoh
Fibres :	Barres	Exponentielle (Holzapfel et Casser, 2000)
Jacobs <i>et al.</i> (2014)		
Matrice :	Hexaèdres	Holmes-Mow
Fibres :	Barres	Exponentielle (Holzapfel et Casser, 2000)
Kuo <i>et al.</i> (2010)		
Matrice :	Tétraèdre	Élastique (linéaire)
Fibres :	Coques	Élastique (linéaire)
Rohlmann <i>et al.</i> (2009)		
Matrice :	Hexaèdres	Néo-Hooke
Fibres :	Barres	Non linéaire
Schmidt <i>et al.</i> (2007b, 2009)		
Matrice :	Hexaèdres	Mooney-Rivlin
Fibres :	Barres	Non linéaire
Wang <i>et al.</i> (2012)		
Matrice :	Hexaèdres	Néo-Hooke
Fibres :	Barres	Élastique (linéaire)
Zander <i>et al.</i> (2010)		
Matrice :	Hexaèdres	Néo-Hooke
Fibres :	Barres	Non linéaire
Wagnac <i>et al.</i> (2011)		
Matrice :	Hexaèdres	Mooney-Rivlin
Fibres :	Barres	Non linéaire

Pour la modélisation de l'anneau fibreux, deux approches sont majoritairement utilisées : la considération de la matrice et des fibres de collagène en tant que continuum, et la considération de la matrice et des fibres de collagène en tant qu'entités distinctes. L'approche en continuum combine la matrice et les fibres dans la formulation d'un seul matériau. Son principal avantage est de réduire le nombre d'éléments à utiliser comparativement à la deuxième approche, et ainsi à réduire la complexité du modèle. De plus, elle peut considérer les interactions entre les fibres et la matrice (Guo *et al.*, 2012) par l'ajout d'un terme dans la formulation de l'énergie de déformation, qui sera brièvement décrite à la section 1.5.2. L'interaction fibres-matrice est un sujet relativement nouveau et son effet n'est actuellement quantifiable que par une approche phénoménologique (Guo *et al.*, 2012). Négliger ces interactions peut entraîner une surestimation de la réorientation des fibres durant la mise en charge (Guerin et Elliott, 2006). Son importance par rapport aux propriétés des fibres et de la matrice dissociées reste à clarifier. Le principal inconvénient de la première approche est une plus grande difficulté à interpréter les paramètres des modèles constitutifs.

### 1.5.2 Modélisation constitutive

La formulation des matériaux hyperélastiques dans les modèles numériques par éléments finis est réalisée à l'aide de modèles constitutifs. La *modélisation constitutive* est une approximation empirique du comportement d'un matériau à l'aide d'équations mathématiques (Holzapfel, 2000). La formulation d'un modèle constitutif à partir des résultats d'essais de caractérisation d'un matériau mène à la détermination de constantes ayant une interprétation physique bien définie. Cependant, lorsque le phénomène à étudier s'écarte des conditions des essais ayant servi à caractériser le matériau, l'ajustement des constantes peut être nécessaire. Cette méthode d'ajustement des modèles constitutifs s'appelle *approche phénoménologique*. Elle permet de représenter des matériaux complexes, tels que les tissus biologiques, dans des contextes eux aussi complexes, mais elle ne permet pas de relier le mécanisme de déformation à la structure microscopique des matériaux (Holzapfel, 2000).



La mise au point des modèles constitutifs requiert un modèle d'étalonnage, le plus souvent un modèle expérimental. Or, l'objectif de ces modèles est de représenter un phénomène difficilement observable ou mesurable expérimentalement. Il en découle que les modèles constitutifs sont utilisés pour prédire le comportement de variables n'ayant soit pas servi à la calibration des équations, soit utilisées hors du contexte de calibration. Il est donc impératif de s'assurer que ces modèles prédisent fidèlement le comportement des variables à étudier. Guo *et al.* (2012) affirment qu'un bon modèle constitutif de tissus biologiques devrait être fondé sur une analyse micromécanique plutôt que sur l'ajustement des paramètres en fonction des résultats escomptés. Ezquerro *et al.* (2011) ont proposé une procédure de calibration qui, bien que basée sur l'approche phénoménologique, tente d'assurer la bonne représentation mécanique de chaque composant, en construisant et calibrant le modèle par étape, à partir de l'anneau fibreux, et en lui ajoutant les autres composants un à un. Cette méthodologie favorise le respect du rôle de chaque composant et améliore le rendement du modèle pour l'étude des dégénérescences. L'utilisation répandue de la modélisation constitutive est justifiée, car elle constitue la méthode la plus puissante actuellement disponible pour la simulation du comportement des tissus biologiques. Il est toutefois important de développer des approches méthodologiques différentes afin de permettre la triangulation des résultats. Il est aussi important de bien choisir les critères de validation des modèles. À cet égard, les modèles d'éléments finis sont souvent validés à l'aide de seulement quelques mesures globales du DIV, tels que la variation de la hauteur du disque, la pression intradiscale et le renflement. Comme indiqué par Jacobs *et al.* (2014), il est souvent aisé pour un modèle de correspondre à ces mesures, car celles-ci ont généralement une grande variabilité. Il est donc essentiel de jeter un regard critique sur le comportement micromécanique des modèles afin d'éviter un échafaudage d'hypothèses.

Les modèles constitutifs (hyperélastiques) sont fondés sur un bilan énergétique  $W$ , combinant l'énergie de déformation volumique  $W_V$  et l'énergie de distorsion  $W_d$  :

$$W = W_V + W_d \quad (1.1)$$

Dans le cas du DIV, la fonction d'énergie de déformation volumique est associée à la matrice, alors que l'énergie de distorsion est partagée entre la matrice et les fibres de collagène. Les modèles d'éléments finis récents tiennent également compte de l'énergie de déformation liée à l'interaction entre les fibres et la matrice  $W_{IFM}$  (Guo *et al.*, 2012; O'Connell *et al.*, 2012), de sorte que l'énergie de déformation totale soit :

$$W = W_{matrice} + W_{fibres} + W_{IFM} \quad (1.2)$$

Comme constaté au tableau 1.2, la matrice est souvent modélisée par un modèle néo-Hooke incompressible, définit comme suit :

$$W_{matrice} = c_1 (I_1 - 3) \quad (1.3)$$

où  $c_1 = \mu_1/2$ . Pour le modèle néo-Hooke,  $\mu_1$  correspond au module de cisaillement  $\mu$ . Dans l'équation (1.3) et les équations suivantes,  $I_\alpha$  sont des invariants du tenseur de déformation Cauchy–Green « droit » (Holzapfel, 2000). Selon Guo *et al.* (2012), le modèle néo-Hooke incompressible est satisfaisant pour représenter la matrice de l'anneau fibreux. Guerin et Elliott (2007), O'Connell *et al.* (2012), ainsi que d'autres cités au tableau 1.2, ont toutefois utilisé une forme couplée du modèle de Mooney-Rivlin, qui fait intervenir des constantes supplémentaires :

$$W_{matrice} = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3) + c_3 (J - 1)^2 - 2(c_1 + 2c_2) \ln J \quad (1.4)$$

où  $c_2$  et  $c_3$  sont des constantes du matériau et  $J$  est le ratio du volume déformé sur le volume initial. Pour modéliser les propriétés des fibres, la forme exponentielle proposée par Holzapfel et Casser (2000) est souvent utilisée (Guerin et Elliott, 2007; O'Connell *et al.*, 2012; Jacobs *et al.*, 2014) :

$$W_{fibres} = \sum_{\alpha=4,6} \frac{c_4}{2c_5} \left( e^{c_5(I_\alpha-1)^2} - 1 \right) \quad (1.5)$$

pour laquelle la sommation fait intervenir l'effet de deux familles de fibres dont l'orientation est spécifiée à l'aide de vecteurs. Il est possible de ne tenir compte que d'une seule famille de fibres. Cependant, les modèles publiés regroupent plusieurs lamelles en une seule afin de

réduire la puissance de calcul requise (Peng *et al.*, 2006). Cela suppose une cohésion parfaite entre toutes les lamelles regroupées et requiert une formulation d'énergie à deux familles de fibres. Une cohésion parfaite entre les lamelles est une hypothèse simplificatrice dont l'implication reste à clarifier (Luxmoore *et al.*, 2012). De plus, le regroupement de deux familles de fibres modifie le cisaillement à l'intérieur de chaque lamelle et, par conséquent, modifie leur comportement. Cette simplification peut convenir pour une étude macromécanique du DIV, mais une analyse micromécanique des lamelles de l'anneau fibreux devrait plutôt faire intervenir une seule famille de fibres par lamelle, comme il a été observé dans les études histologiques (Cassidy *et al.*, 1989; Marchand et Ahmed, 1990; Holzapfel *et al.*, 2005).

### 1.5.3 Implémentation d'un modèle constitutif dans le logiciel d'éléments finis ANSYS 14

La version 14 de ANSYS (ANSYS, 2011) supporte deux variantes d'un modèle constitutif pour un matériau anisotrope hyperélastique, soit une forme polynomiale et une forme exponentielle. Cette dernière s'exprime ainsi :

$$W_d = \sum_{i=1}^3 a_i (I_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^3 b_j (I_2 - 3)^j + \sum_{\alpha=4,6} \frac{c_4}{2c_5} \left( e^{c_5(I_\alpha - 1)^2} - 1 \right) \quad (1.6)$$

La première somme de l'équation (1.6) correspond au modèle *Yeoh*, lequel est basé sur l'hypothèse que la dérivée de la fonction d'énergie par rapport à l'invariant  $I_2$  est négligeable (Holzapfel, 2000). Si tel n'est pas le cas, il faut considérer la seconde somme de l'équation (1.6). En posant les constantes  $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$ , l'équation (1.6) se réduit à :

$$W_d = a_1 (I_1 - 3) + b_1 (I_2 - 3) + \sum_{\alpha=4,6} \frac{c_4}{2c_5} \left( e^{c_5(I_\alpha - 1)^2} - 1 \right) \quad (1.7)$$

Pour un matériau incompressible,  $J = 1$  (Holzapfel, 2000). Par conséquent, les deux derniers termes de l'équation (1.4), qui constituent l'énergie de déformation volumique, sont nuls. La somme des énergies de la matrice (équation (1.4)) et des fibres (équation (1.5)) correspond alors à la forme simplifiée du modèle de matériau hyperélastique pris en charge par ANSYS 14, soit l'équation (1.7). Les constantes  $a_1$  et  $b_1$  de l'équation (1.7) correspondent donc res-

pectivement aux constantes  $c_1$  et  $c_2$  de l'équation (1.4). Considérant que  $c_2 = -\mu_2/2$  et que  $\mu = \mu_1 - \mu_2$  (Holzapfel, 2000), il n'est envisageable de déterminer les constantes du modèle de Mooney-Rivlin (équation (1.4)) à l'aide de celle du modèle néo-Hooke (équation (1.3)) que si l'on suppose  $c_2 = 0$ . Le cas échéant, les constantes déterminées pour le modèle de Holzapfel et Casser (2000) (équation (1.5)) pourraient être utilisées pour déterminer les constantes du modèle hyperélastique exponentiel d'ANSYS (équation (1.7)). Il est à noter que les matériaux hyperélastiques prédéfinis dans ANSYS ne prennent pas en charge l'interaction fibres-matrice et que cela requiert la création d'un algorithme personnalisé.

L'énergie de déformation volumique est définie dans ANSYS 14 par :

$$W_v = \frac{1}{d} (J - 1)^2 \quad (1.8)$$

où le paramètre d'incompressibilité  $d = (1 - 2\nu) / (c_1 + c_2)$  pour le matériau Mooney-Rivlin prend une valeur nulle pour un matériau incompressible.

## 1.6 Conclusion de la revue de la littérature

La revue de la littérature a d'abord présenté la problématique de la hernie discale et son impact socioéconomique. Le segment lombaire L5-S1 est un des plus affectés de toute la colonne vertébrale, ce qui a orienté la revue de la littérature vers ce segment en particulier. Celui-ci a été décrit afin de relever ses caractéristiques physiques importantes pour la modélisation. Il a été noté que la modélisation du disque intervertébral seul était pertinente, ce qui simplifie le traitement de la problématique par l'approche analytique. Parmi les principales caractéristiques du disque intervertébral, rappelons sa section transversale elliptique, la structure à multiples lamelles de l'anneau fibreux et ses propriétés anisotropes et hyperélastiques, sans oublier la nature incompressible du noyau pulpeux d'un disque sain et son comportement hydrostatique. L'anneau fibreux est sujet à des variations de géométrie importantes lors de la mise en charge, ce qui est une source de non-linéarité qui s'ajoute à celle inhérente au matériau des lamelles.

Le disque intervertébral a été comparé à un réservoir sous pression, ce qui a servi de base à plusieurs modèles analytiques. Ceux-ci sont toutefois limités dans leur niveau de réalisme et aucun ne combine l'anisotropie de l'anneau fibreux, l'interaction des multiples lamelles et les grandes variations géométriques tout en tenant compte de l'équilibre statique. Les analyses par éléments finis portant sur ce sujet sont beaucoup plus nombreuses et perfectionnées que les modèles analytiques, mais le problème de triangulation de leurs résultats, posé par le manque de moyens de validation, a été soulevé. Les critères de validation de ces études sont généralement limités à des paramètres sujets à de grandes variabilités. De plus, les stratégies de modélisation ne permettent pas toujours d'analyser le comportement micromécanique des tissus.

Cette thèse vise à répondre au problème de triangulation des résultats des modèles biomécaniques expérimentaux et numériques en proposant un modèle analytique prenant en charge les éléments essentiels soulevés dans cette revue de la littérature. La structure de la thèse, ses objectifs et la méthodologie de recherche sont détaillés au chapitre 2.



## **CHAPITRE 2**

### **DÉFINITION DU PROJET DE RECHERCHE**

#### **2.1 Introduction**

Ce chapitre définit la structure de la thèse en présentant d’abord l’objectif principal, les sous-objectifs et l’hypothèse principale de l’étude. Il présente ensuite la méthodologie du projet de recherche et explique la cohérence du plan de publications des articles de revue et des conférences scientifiques, en vertu des résultats escomptés et des impacts envisagés.

#### **2.2 Objectifs et hypothèse de l’étude**

La revue de la littérature a fait état des principales études expérimentales, analytiques et numériques par éléments finis portant sur les disques intervertébraux. Il a été constaté que la triangulation méthodologique était déficiente, vu le faible niveau de réalisme des modèles analytiques disponibles. L’objectif principal de cette étude est d’explorer l’aptitude de théories existantes à prédire les contraintes et les déplacements en tout point d’un disque intervertébral soumis à une charge de compression uniaxiale, en vue de permettre la triangulation méthodologique. L’état actuel des connaissances nécessite certaines simplifications dans la poursuite de cet objectif, sans quoi la validation des résultats et la compréhension du comportement des théories pourraient être compromises.

L’idée que le disque intervertébral est assimilable à un réservoir sous pression semble pertinente pour un disque sain : l’anneau fibreux fait office de paroi, et le noyau pulpeux, en raison de son caractère quasi incompressible et fortement hydraté, agit comme une pression uniforme s’exerçant sur la paroi interne de l’anneau fibreux. La composition à multiples lamelles de l’anneau fibreux implique la considération d’un réservoir épais constitué de plusieurs couches minces. Le faible module d’élasticité des lamelles implique de grands changements de la géométrie du disque, et les fibres intégrées à la matrice de collagène font intervenir la notion d’anisotropie des lamelles. En considération pour ces éléments, l’hypothèse principale de l’étude

se formule comme suit : *Les théories des réservoirs sous pression et des matériaux composites peuvent être utilisées pour simuler le comportement d'un disque intervertébral à multiples lamelles soumis à une force de compression uniaxiale représentative de conditions typiques de travail.* En vertu de l'objectif principal et de l'hypothèse principale, les sous-objectifs sont les suivants : 1) modéliser un disque à plusieurs lamelles à l'aide de la théorie des membranes en tenant compte des grandes déformations ; 2) inclure les contraintes de discontinuité dans le modèle pour simuler l'ancrage des lamelles dans les plateaux vertébraux ; 3) tenir compte des propriétés anisotropes des lamelles de l'anneau fibreux. Le disque est considéré comme sain, c'est-à-dire celui d'une personne adulte de moins de 40 ans, dont l'état est assimilable au grade 0 de la classification modifiée de Dallas, discutée à la section 1.3.3. Le disque L5–S1 est visé par cette étude compte tenu de la forte prévalence de la hernie discale à ce niveau vertébral.

La validité de cette étude repose sur le critère de détermination de Popper (1984), selon lequel le modèle analytique doit être falsifiable et considéré scientifiquement valide tant qu'il n'est pas réfuté en vertu des objectifs prescrits. Advenant que la poursuite des sous-objectifs ci-haut mentionnés ne permette pas de réfuter l'hypothèse principale, le modèle pourra être considéré pour de futures améliorations. Autrement, de nouveaux principes théoriques ou hypothèses devront être envisagés.

### **2.3 Méthodologie de recherche**

La figure 2.1 présente la méthodologie de recherche utilisée. Une revue de la littérature mène au choix des hypothèses simplificatrices et à la sélection des paramètres de modélisation. Un modèle analytique et un modèle numérique par éléments finis sont construits de façon évolutive pour répondre à chaque sous-objectif. Le modèle analytique et le modèle numérique par éléments finis sont comparés entre eux, puis ils sont comparés avec les données expérimentales disponibles dans la littérature afin d'assurer la triangulation des résultats.

Les résultats de l'étude sont tributaires des hypothèses posées, mais aussi des paramètres de modélisation. Puisque les données disponibles dans la littérature sont souvent limitées ou su-



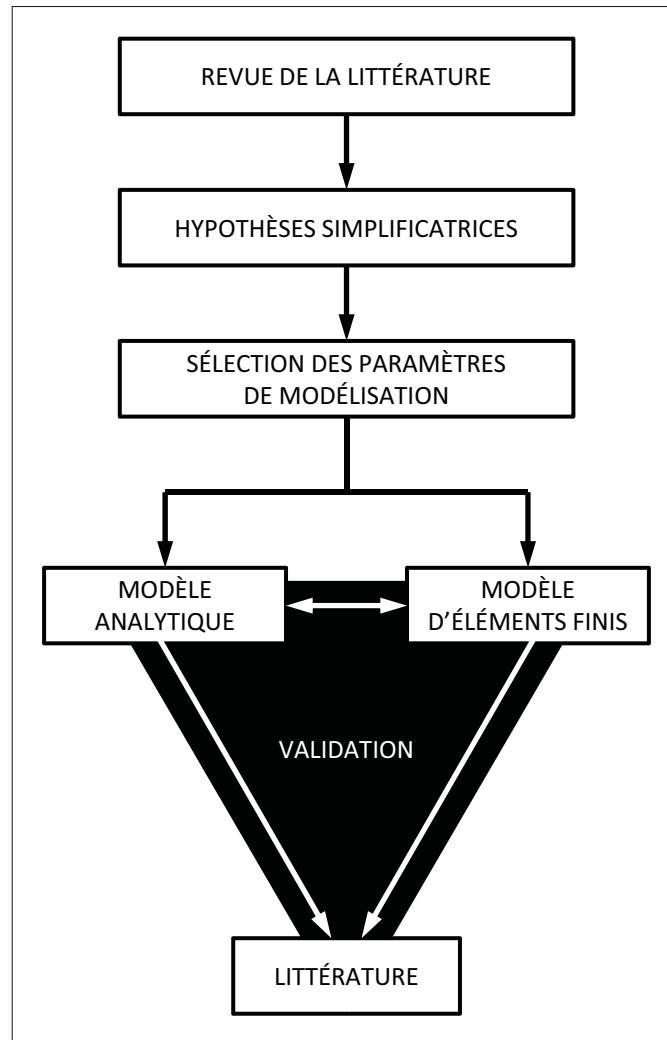


Figure 2.1 Méthodologie de recherche

jettes à une grande variabilité, le modèle analytique est construit de façon à permettre l’ajustement des paramètres, que ce soit pour le nombre de lamelles, l’épaisseur des lamelles ou les propriétés des matériaux, pour ne nommer que ceux-là. La validité interne de l’étude dépend donc des hypothèses de l’étude et des fondements théoriques du modèle, mais elle n’est pas compromise par les données utilisées. L’algorithme de calcul est écrit sur le logiciel matriciel Matlab R2012b (MATLAB, 2012).

Sans un moyen de validation, un modèle explicatif serait inadmissible (Laurencelle, 2005). Les résultats de la modélisation analytique sont confrontés à la fois à ceux d’un modèle numérique

par éléments finis et à la littérature, tel que montré à la figure 2.1, afin d'en vérifier la validité externe. La méthode des éléments finis est exécutée sur le logiciel ANSYS 14 (ANSYS, 2011), et le modèle est développé de façon à correspondre au niveau de détails du modèle analytique. Un modèle d'analyse par éléments finis sophistiqué pourrait être développé, mais un modèle équivalant au modèle analytique est jugé pertinent pour les besoins de validation de l'étude. En effet, l'approche analytique développée n'en est qu'à ses débuts. Comparer le modèle simplifié avec un modèle comportant un niveau de réalisme élevé pourrait mener à des conclusions prématurées. Il est donc préférable de procéder à la validation par étapes, à l'aide d'un modèle basé sur une approche différente, mais dont le niveau de détails peut facilement s'adapter. Il est toutefois difficile d'en faire de même avec des études expérimentales sur des sujets vivants ou des spécimens cadavériques. Bien que la fabrication d'un modèle expérimental synthétique soit envisageable, la comparaison avec des résultats expérimentaux issus de spécimens biologiques est jugée préférable afin d'assurer une ligne directrice vers les résultats réels attendus. La comparaison avec la littérature sert donc à vérifier que les modèles sont représentatifs des observations factuelles documentées, bien qu'il soit prévisible qu'ils ne leur correspondent qu'en partie. Comme mentionné à la section 2.2, le modèle, s'il est réfutable mais non réfuté, doit être considéré valide. Procéder par étapes permet d'améliorer le réalisme du modèle jusqu'à un niveau satisfaisant.

### 2.3.1 Théorie des membranes et fondements du modèle

La théorie des membranes est couramment utilisée dans l'étude des réservoirs à paroi mince sous pression. Elle est le concept fondamental sur lequel repose l'hypothèse principale de l'étude. Elle est fondée sur certaines hypothèses qu'il importe d'analyser. La figure 2.2 présente le domaine conventionnel d'utilisation de la théorie des membranes et confronte ses caractéristiques aux exigences de modélisation du disque intervertébral. Les éléments de cette figure constituent une synthèse des principes énoncés dans *Roark's Formulas for Stresses and Strains* (Roark *et al.*, 2002). Une représentation théorique réaliste d'un disque intervertébral, pour un chargement quasi statique, passe par un comportement non linéaire issu de deux causes : 1) les

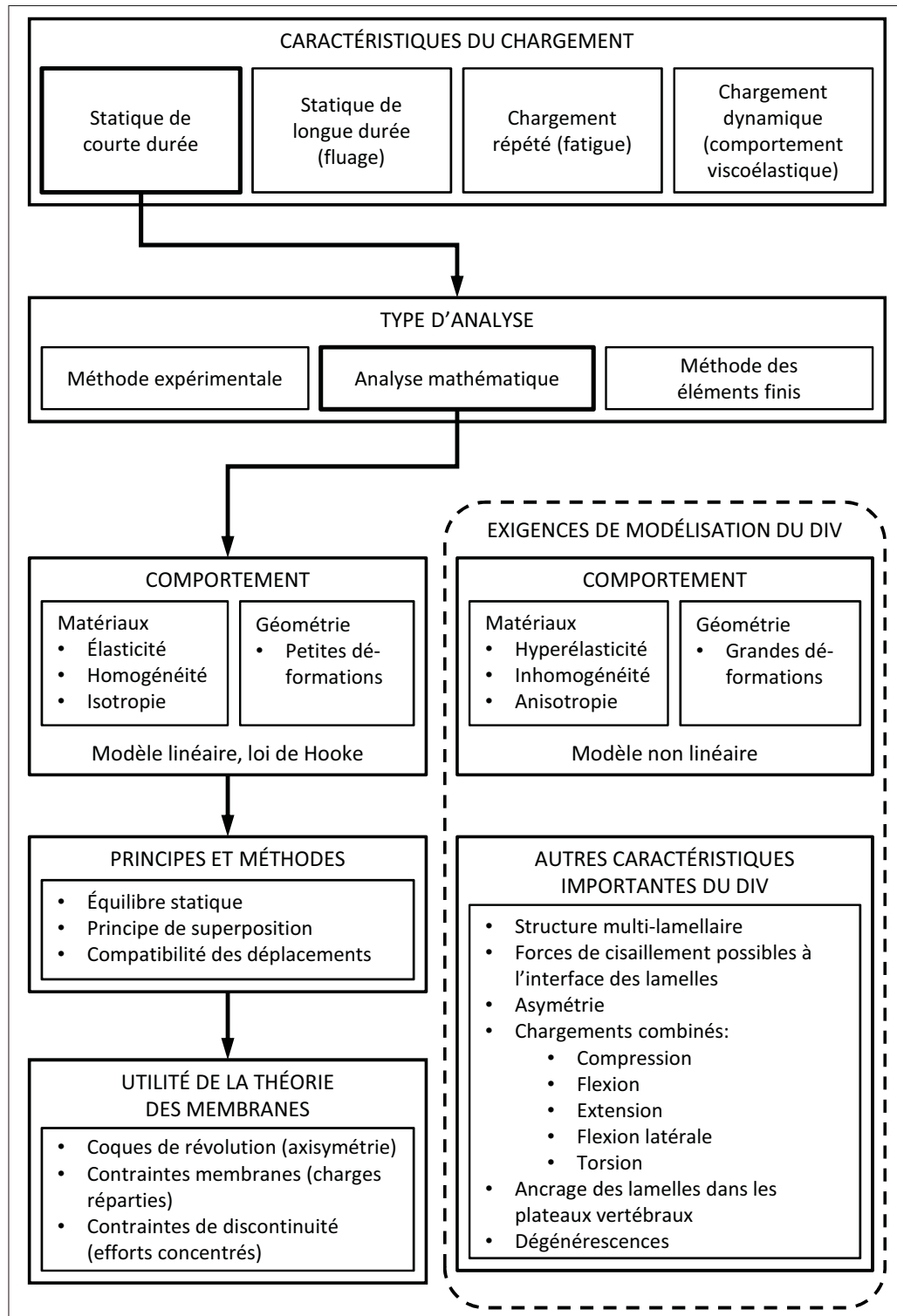


Figure 2.2 Domaine conventionnel d'utilisation de la théorie des membranes

lamelles de l'anneau fibreux ont un comportement hyperélastique ; 2) la faible rigidité des tissus et la rotation des lamelles autour de leurs points d'ancrage dans les plateaux vertébraux mènent à de grands changements de géométrie. La théorie des membranes est valide pour des matériaux répondant à la loi de Hooke, et elle suppose que les changements géométriques sont négligeables. Or, le renflement du disque intervertébral soumis à une compression axiale implique des changements géométriques considérables qui font en sorte que les conditions initiales de l'analyse ne peuvent pas être considérées comme constantes. Les autres aspects du comportement du DIV, soit l'inhomogénéité et l'anisotropie, posent un défi moindre. En effet, les variations dimensionnelles et les variations des propriétés des matériaux à travers la structure peuvent être tolérées par la théorie des membranes dans la mesure où ces variations sont faibles et régulières (Zingoni, 1995). L'anisotropie peut être prise en compte avec la théorie des matériaux composites, mais celle-ci se heurte également au problème de non-linéarité. La nécessité de tenir compte de l'évolution de la géométrie en cours d'analyse peut tirer profit du principe de superposition en divisant le problème global en une suite de problèmes au cours desquels la géométrie et les chargements évoluent. Dans ce contexte, le terme *superposition* signifie l'addition des résultats obtenus au cours d'une méthode itérative. L'interaction des multiples lamelles de l'anneau fibreux peut être prise en compte par la vérification de la compatibilité des déplacements des lamelles adjacentes. Cette condition est couramment utilisée dans la résolution de problèmes hyperstatiques en mécanique du solide. La théorie est adaptée aux coques de révolution, ce qui rend possible l'étude de formes complexes. Cependant, l'axisymétrie demeure une limitation, et représente un défi dans la modélisation du DIV, notamment dans la région lombaire. La théorie des membranes suppose que l'effet de la flexion et du cisaillement des tissus est négligeable et que les charges externes sont équilibrées par les forces agissant à la mi-épaisseur des lamelles. L'étude des contraintes est valide aux régions éloignées des discontinuités, c'est-à-dire suffisamment loin des forces et moments ponctuels et des variations brusques de géométrie et de chargement. Les effets de discontinuité sont généralement pris en compte par la théorie des poutres sur fondation élastique, puis les contraintes découlant des effets de discontinuité sont ajoutées aux contraintes calculées par la théorie des membranes à l'aide du principe de superposition. Dans le contexte du DIV, l'ancrage des la-

nelles dans les plateaux vertébraux, assuré par les fibres de Sharpey, provoque des effets de discontinuité. En vérifiant la compatibilité des déplacements des lamelles adjacentes et en utilisant le principe de superposition pour tenir compte à la fois des grandes déformations et des effets de discontinuité, il est concevable de construire un modèle théorique du DIV fondé sur la théorie des membranes. Les exigences de modélisation du DIV, identifiées à la figure 2.2, constituent les lignes directrices du projet de recherche. Parmi ces exigences de modélisation, seuls la compression uniaxiale, la structure multilamellaire, les grandes déformations, l'ancrage des lamelles dans les plateaux vertébraux et l'anisotropie entrent dans le cadre de cette étude.

### 2.3.2 Cheminement du projet de recherche

La modélisation est réalisée par étapes afin de valider chacune d'elles. La figure 2.3 présente l'évolution du projet. Ce cheminement, regroupé sous quatre axes, est inspiré des modèles de gestion des cycles de développement de logiciels. Le premier axe définit les *caractéristiques* à modéliser. Le deuxième axe définit les *concepts analytiques* envisagés pour représenter les caractéristiques visées. Le troisième axe définit les *moyens de modélisation* utilisés pour la mise en oeuvre des concepts. Le quatrième axe situe le *plan de publications*, qui permet l'évaluation et le déploiement des résultats. Les articles de revue sont présentés aux chapitres 3 à 6, et tracent le parcours illustré à la figure 2.3.

## 2.4 Résultats escomptés, impacts envisagés et plan de publications

Le projet de recherche vise à développer l'approche analytique, qui a été peu exploitée pour l'étude de cette problématique, au profit des études expérimentales et des analyses par éléments finis. Plus particulièrement, il vise à déterminer l'état des contraintes et les déplacements en tout point de l'anneau fibreux. Cette étude pourrait avoir un impact sur les stratégies de recherche futures et sur la validation de leurs résultats ; la démonstration du potentiel de l'approche analytique pourrait mener à l'élaboration de modèles analytiques suffisamment évolués pour permettre la triangulation des résultats d'études expérimentales et d'éléments finis. Sans

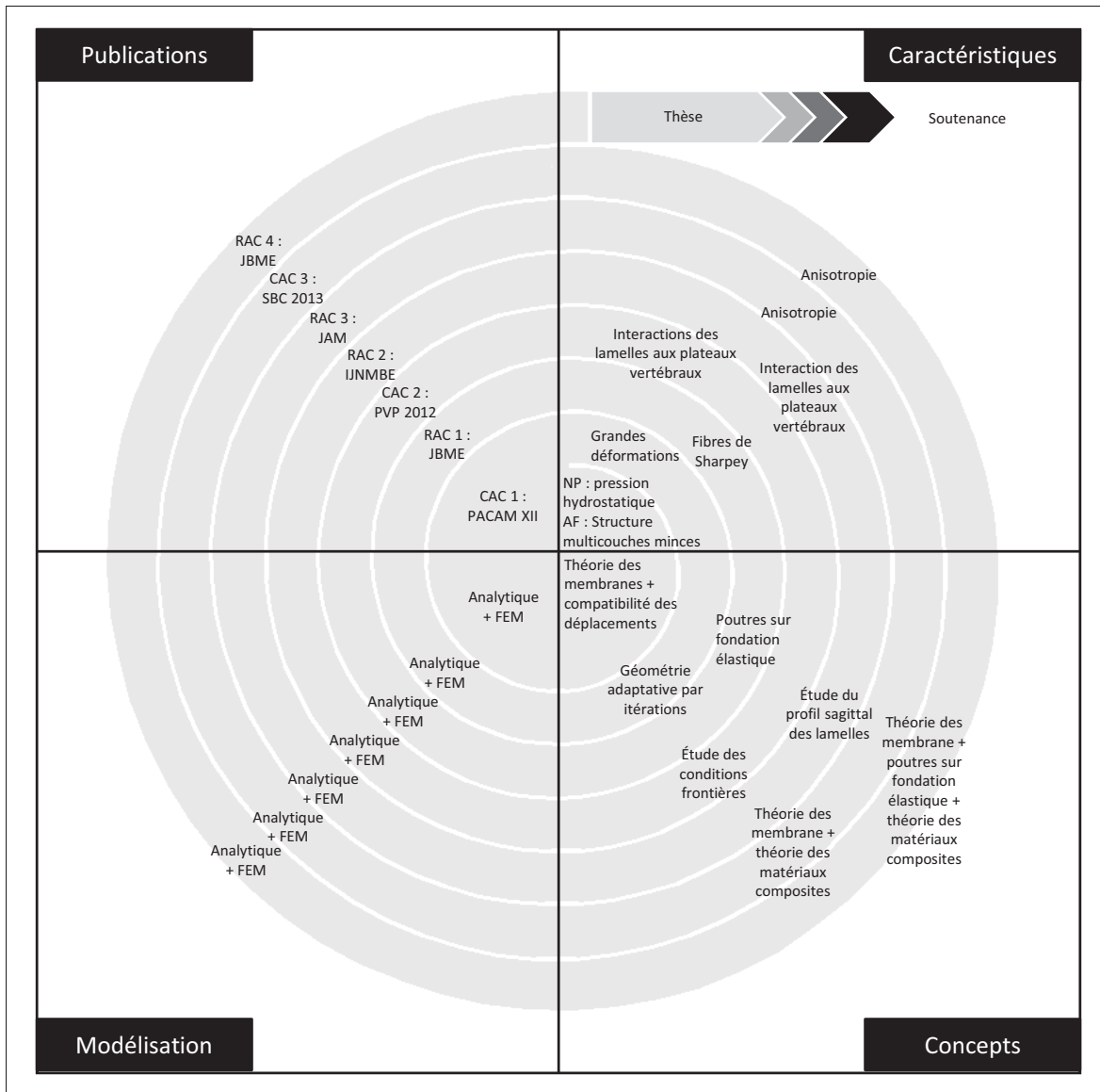


Figure 2.3 Cheminement du projet de recherche

prétendre que cette approche ait un potentiel comparable à celui de la méthode des éléments finis, elle pourra néanmoins apporter des balises quantitatives sur certains résultats, et appuyer ou infirmer certains résultats actuellement difficiles à critiquer par manque de moyens de validation. Indirectement, elle pourrait avoir un impact socioéconomique considérable. En effet, une meilleure compréhension du comportement du disque intervertébral et du mécanisme de lésion menant à la hernie discale permettra de réduire les risques de maladies professionnelles en favorisant l'élaboration de meilleures procédures de travail et la conception d'outils et de

postes de travail mieux adaptés. Elle permettra aussi d'améliorer l'efficacité des actions en prévention par le biais d'une sensibilisation plus ciblée sur les causes de la hernie discale. Cette étude est d'autant plus importante qu'elle est l'une des rares du type analytique et, à la connaissance de l'auteur, la seule qui vise à répondre simultanément aux exigences de modélisation décrites précédemment.

Ce projet novateur a le potentiel de servir de plateforme à d'autres modèles analytiques plus avancés. Il est réaliste d'envisager que le modèle analytique puisse, à terme, simuler le comportement d'un disque sain ayant une section transversale elliptique et incluant le renflement, pour des chargements de flexion et de torsion combinés à la compression, en tenant compte des propriétés hyperélastiques et anisotropes des lamelles de l'anneau fibreux. Un tel modèle aurait un intérêt pour la communauté scientifique en lui permettant d'obtenir des résultats comparatifs pour aider à la validation de modèles d'analyse par éléments finis. À partir d'une interface conviviale, l'utilisateur pourrait saisir les paramètres de l'étude, tels que les dimensions du disque intervertébral, les types et l'intensité des charges, le nombre de lamelles, l'épaisseur des lamelles et l'angle des fibres dans chaque lamelle, entre autres choses, afin de correspondre à un sujet précis. Suite à la solution, le logiciel pourrait afficher les résultats sous forme de graphiques, montrant les contraintes en tout point de l'anneau fibreux, le renflement de l'anneau fibreux et la déformation axiale du disque intervertébral. Les valeurs critiques pourraient être affichées dans un tableau des résultats et un rapport d'analyse pourrait être généré. Des études de sensibilité pourraient aussi être exécutées automatiquement, en élaborant au préalable un critère de variation de certains paramètres. Cette méthode aurait pour avantage de ne pas dépendre d'un niveau de discrétisation, comparativement à la méthode des éléments finis, qui requiert des connaissances particulières pour assurer la convergence de ces modèles. De plus, la modélisation analytique est une solution robuste nécessitant peu de réglages, en contraste avec la méthode des éléments finis, qui nécessite un choix approprié de solveur et d'éléments, avec la panoplie d'options possibles pour ces derniers, et qui nécessite une calibration des matériaux constitutifs. La simplicité d'utilisation de la méthode analytique permettrait aux chercheurs d'utiliser le modèle analytique comme moyen rapide de validation. Elle serait

aussi facilement accessible aux spécialistes du milieu médical, qui peuvent ne pas avoir les connaissances requises pour utiliser des modèles d'analyse par éléments finis. L'intérêt pour ce milieu serait plutôt de prédire l'effet des dégénérescences et des interventions chirurgicales. Or, il serait prématuré de prétendre l'aptitude du modèle analytique à prédire le comportement d'un disque intervertébral à divers stades de dégénérescence, mais cette possibilité n'est pas exclue.

Il est également possible que les résultats de ces travaux suscitent l'intérêt dans d'autres sphères de recherche et de développement que celle visée par cette étude. Notons, par exemple, la conception de prothèses discales, l'étude de la résistance mécanique des vaisseaux sanguins, et l'écriture de nouvelles normes de conception de réservoirs à paroi épaisse composée de plusieurs couches. C'est d'ailleurs dans cette optique que le plan de publications a été préparé. La conférence donnée lors du *12th Pan-American Congress of Applied Mechanics (PACAM XII)*, par exemple, a visé à rejoindre un auditoire diversifié, puisque le contenu de cette présentation était suffisamment généralisé. La présentation faite à l'*ASME 2012 Pressure Vessels and Piping Conference (PVP2012)* a plutôt ciblé un réseau de chercheurs spécialisés en réservoirs sous pression afin de mettre à l'épreuve le choix des théories des réservoirs sous pression. Le premier article de revue, quant à lui, a été publié par l'*ASME Journal of Biomechanical Engineering*, spécialisé en biomécanique, afin d'intéresser les chercheurs du domaine. La présentation à l'*ASME 2013 Summer Bioengineering Conference* a également été faite dans ce but. Les deuxième et troisième articles de revue ont respectivement été soumis à l'*International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering* et au *Journal of Applied Mechanics*. Le sujet de ces deux études est connexe et rejoindra ainsi des chercheurs en biomécanique, mais aussi des chercheurs dans des domaines élargis de la mécanique. Finalement, le quatrième article de revue a été soumis à l'*ASME Journal of Biomechanical Engineering* pour donner suite au premier article de revue. La liste complète des publications reliées à la thèse est présentée à l'annexe I.



## **CHAPITRE 3**

### **ARTICLE 1 : ON THE MODELING OF AN INTERVERTEBRAL DISC USING A NOVEL LARGE DEFORMATION MULTI-SHELL APPROACH**

Sébastien Demers<sup>1</sup>, Abdel-Hakim Bouzid<sup>1</sup>, Sylvie Nadeau<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure,

1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, Québec, Canada H3C 1K3

Article publié à la revue « Journal of Biomechanical Engineering » en mai 2013.

#### **Résumé**

Afin d'élaborer un modèle analytique réaliste d'un disque intervertébral, il importe de s'assurer de l'applicabilité des principes fondamentaux pour simuler les caractéristiques souhaitées. Il faut par ailleurs choisir ces fondements de façon à ce qu'ils puissent supporter un raffinement et une complexification ultérieure. Afin de considérer le renflement de l'anneau fibreux, ses multiples lamelles de faible épaisseur et les grandes variations géométriques, la théorie des membranes est utilisée. Celle-ci permet d'envisager des améliorations telles que la considération d'efforts concentrés et l'anisotropie de l'anneau fibreux. Une charge de compression uniaxiale est simulée par une pression intradiscale hydrostatique et uniforme. Ce chargement facilite la validation du modèle par sa simplicité et parce qu'il est le mieux documenté.

Cet article présente donc une étude de contrainte basée sur la théorie des membranes, incluant des conditions de compatibilité des déplacements afin de tenir compte de l'interaction des lamelles. Les grandes déformations élastiques des tissus impliquent des variations importantes de la géométrie, qui est prise en compte par une méthode itérative. Les contraintes dans les directions circonférentielles et longitudinales sont comparées à celles obtenues par deux modèles d'analyse par éléments finis ; l'un utilisant un couplage des déplacements aux noeuds des lamelles, l'autre utilisant des éléments contact à l'interface des lamelles.

Les contraintes calculées sont maximales à la première lamelle, soit celle la plus près du noyau pulpeux et, décroissent jusqu'à la lamelle extérieure. La contrainte circonférentielle est prédominante et la différence est de moins de 5% en comparaison avec le modèle d'éléments finis avec couplage des degrés de liberté en translation. Cette différence est sous les 11% lorsque le modèle d'analyse par éléments finis avec éléments contact est pris en comparatif. Cette étude démontre qu'il est possible de simuler le comportement d'un disque intervertébral à multiples lamelles de façon analytique. Des simplifications importantes ont été apportées et des améliorations sont suggérées pour rendre le modèle plus réaliste. Des recommandations sont également faites sur d'éventuelles études expérimentales nécessaires à la validation de modèles analytiques et numériques.

## **Abstract**

The objective of this study is to develop an analytical model to predict the stresses and displacements in the lamellae of the intervertebral disc subjected to a compressive force. This is achieved by developing a model based on membrane theory combined to large deformation multi-shell structural behavior. Equations for longitudinal and circumferential stresses are formulated for each lamella of the anulus fibrosus. Multi-lamellae interaction is a statically indeterminate problem, which requires equations of compatibility of displacements of adjacent lamellae to be resolved. Large deformation inherent to soft tissue is considered and the solution is obtained using an iterative process. Elastic interactions with large deformation is a novelty in analytical modeling of soft tissues. This provides model realism and offers the possibility for new and in-depth investigations. Results are given for longitudinal and circumferential stresses and displacements as well as contact pressures for every lamella of the anulus fibrosus. The analytical results are compared to those of two finite element models. Results suggest that the highest stressed zone is located on the innermost lamella. Stresses decrease through disc thickness and are maximum at the innermost lamella. Circumferential stress is predominant and the difference is less than 5% at any point of the anulus fibrosus when the analytical model is compared to the finite element model using coupled degrees of freedom at the lamellae in-

terface. When compared to the finite element model using contact elements, the difference is below 11%. Contact pressures from the inside to the outside of the annulus fibrosus are shown to decrease non-linearly. The model presented in this study has demonstrated that it is possible to analytically simulate the complex mechanical behavior of a multi-shell intervertebral disc subjected to compression, provided some simplifications. Further improvements are suggested to increase model realism, and recommendations are given for future experimentation necessary to support both analytical and numerical models.

### 3.1 Introduction

The intervertebral disc is composed of two main components : the nucleus pulposus and the annulus fibrosus. The former is composed of unorganized type I collagen fibers and type II collagen gel, while the latter is composed of highly organized type I collagen fibers embedded in a type II collagen matrix (Cassidy *et al.*, 1989), forming 15 to 25 concentric lamellae (Marchand et Ahmed, 1990). The disc is the link between the upper and lower vertebrae through the endplates. Surrounding tissues include muscles and ligaments.

External forces acting on a vertebral segment can include compressive loads, flexural moments, shear loads and torsion. These loads usually occur in combination and they influence the pressure of the nucleus pulposus. The annulus fibrosus, surrounding the nucleus pulposus, sustains this pressure in the manner of a pressurized vessel, as illustrated in Fig. 3.1. Failure of the annulus fibrosus to sustain the applied load can lead to disc herniation. Critical loading conditions are torsion, flexion and their combined effect (Roaf, 1960; Nachemson, 1981; Gunzburg *et al.*, 1992). Although disc herniation has been a recurrent problem for decades, the failure mechanism of the intervertebral discs is still misunderstood and requires investigations (Canale et Beaty, 2008). There is hardly any accurate analytical model available in the literature that could be used to model the intervertebral discs and validate the numerous published finite element (FE) studies. These FE models, although very sophisticated, need to be validated with other approaches, either experimental or analytical. Methodological triangulation with experiments is feasible but implies significant difficulties, such as feasibility, cost, specimen preser-

variation, inter-individual specimen variations and sufficient sampling. Therefore, an analytical method represents an efficient, novel and promising approach to complement other methods to study the mechanical behavior of intervertebral discs.

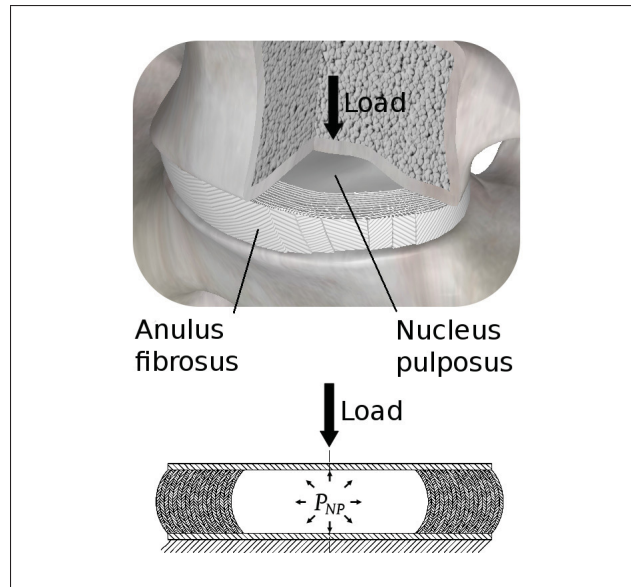


Figure 3.1 Representation of intradiscal pressure  $p_{NP}$  generated by a uni-axial load acting on the lumbo–sacral junction

At slow deformation rates, the nucleus pulposus reacts as an incompressible inviscid fluid (Skaggs *et al.*, 1994; Iatridis *et al.*, 1996). Thus, the nucleus pulposus is frequently modelled as an hydrostatic pressure inside the anulus fibrosus (Nachemson, 1981; Klein *et al.*, 1983; Goto *et al.*, 2002; Prud’Homme, 2008). It creates tensile forces in the anulus fibrosus (Klein *et al.*, 1983). In addition, loadings such as compression, bending and torsion create bulging of the disc (Heuer *et al.*, 2008b). The lamellae curvatures are influenced by the varying height of the disc and endplates’ relative angulations, especially during bending. Because geometry changes are important in large deformation analysis, bulge effect should be accounted for. Indeed, the stress distribution is expected to be significantly influenced by the radii of curvature. Although data is still limited in the literature, a relation between loading conditions and disc bulge is available (Wenger et Schlegel, 1997; Heuer *et al.*, 2008b; O’Connell *et al.*, 2010).

It is recognized that uniaxial compression of the disc causes fracture of the endplates rather than creating herniation (Roaf, 1960; Hickey et Hukins, 1980). However, this simple loading case allows ease of validation of analytical models before proceeding with more complex loading conditions, which require additional hypotheses. Compression is an axisymmetric loading case and is the only case actually used by the *National Institute for Occupational Safety and Health (NIOSH)* in its *Revised NIOSH Lifting Equation* (Waters *et al.*, 1993), which aims at identifying ergonomic solutions for lifting tasks in the workplace. In this context, developing an analytical model which uses this same loading case makes sense, although not ideal. Yet, there are just a few analytical models available in the literature and their ability to analyse stresses are limited. In view of this, there is a need for an analytical model that includes sufficient realistic characteristics of the annulus fibrosus and complex loading conditions.

Among existing analytical models, Hickey et Hukins (1980) developed a model based on the theory of thick-walled cylinders to predict the behavior of the disc under an uniaxial compressive load. One advantage of this approach is that the annulus fibrosus is entirely defined with Lamé equations. However, the effect of disc bulge and multi-shell structure are ignored, leading to unrealistic evaluation of biaxial stresses. Klein *et al.* (1983) later suggested a model to evaluate fiber strain based on the nucleus content accommodated by disc bulge. Volumetric measurements were made during compressive tests conducted on discs excised from rabbits and dogs. This model is limited to a single lamella and violates static equilibrium. McNally et Arridge (1995) developed a model based on static equilibrium and membrane theory. Although it is limited to an axisymmetric single lamella, it calculates biaxial stresses and considers disc bulge. Prud'Homme (2008) modeled the intervertebral disc using the theory of thick-walled cylinders. The author suggested a simplified stress calculation for a disc having an elliptical transverse cross section using the Lamé equations while changing the radius according to the radius of the elliptical curvature. As in Hickey et Hukins (1980), bulge effect was not considered. Iatridis et al Gwynn (2004) modeled the annulus fibrosus as a laminated plane plate. Using the theory of composite materials, they formulated an extensional stiffness matrix, a bending stiffness matrix and a coupled extensional-bending stiffness matrix to calculate the stresses in

each lamella of the laminate. Using a plane stress model simplifies the analysis but is not representative of the geometry of the annulus fibrosus. Furthermore, the model assumes that slip does not occur between the lamellae. Although translamellar bridges were evidenced in ovine annulus (Schollum *et al.*, 2009) and later in human annulus (Smith et Elliott, 2011), their mechanical function needs further investigation. Gregory *et al.* (2012) recently suggested that the inter-lamellar matrix allows some movement between the lamellae during spinal motion and disc loading. Friction between the lamellae has a great influence on the shear interaction between the lamellae and on the overall bending stiffness of the whole annulus. It would affect the stress distribution across the thickness of the annulus and influence bulging. Perfectly "bonded" lamellae would behave like a composite laminate as a whole, as suggested in Iatridis et al Gwynn (2004). No bonding would let the interaction between the lamellae be essentially driven by the contact pressures.

In the field of pressure vessels and piping, multi-layered vessels have been studied (Adali *et al.*, 1995; Naga et Mokhtar, 2005; Jahed *et al.*, 2006; Yuan *et al.*, 2010) but were limited to spherical and cylindrical geometries with small elastic deformation or plastic deformation. Thus, these developments do not represent the annulus geometry and do not account for bulge effect and large deformation.

As can be seen, existing analytical models are limitative in terms of loading conditions, geometry and structural details of the annulus fibrosus. A model based on a developed multi-shell theory and large deformation could set the path to the development of realistic analytical studies and is the subject of the present study. Its implementation is an innovative approach that increases realism in the prediction of the stresses and strains and in understanding the role of the structural organisation of the annulus fibrosus. Many simplifications are required to validate the proposed method but this is a necessary step to push the analytical approach toward a more realistic model. The advantage of the proposed approach over the Revised NIOSH Lifting Equation is that it has potential to be extended to more complex loadings and to incorporate material nonlinear and anisotropic behavior and large deformation, given its multilayered nature and bulging capability.

## 3.2 Methods

### 3.2.1 Model Properties

The model has the shape of a multi-shell axisymmetric barrel composed of 24 concentric lamellae, each having a constant thickness of 0.2 mm (Marchand et Ahmed, 1990). Figure 3.2 shows the geometry of a single lamella and illustrates the  $r$ - $\theta$ - $\varphi$  coordinate system located on the center of an infinitesimal membrane element. The meaning of *membrane* and the membrane theory are discussed later in this section. The axes of the coordinate system are shown in thick arrows. Axis  $r$  refers to the radial direction and is normal to the membrane element. It varies with the location of the chosen element. Axis  $\theta$  refers to the circumferential direction and is independent of the element location. Axis  $\varphi$  refers to the longitudinal direction and varies with the element location. The element location is identified by two subscripts :  $i$  and  $j$ , where  $i$  identifies the element position along  $\varphi$  and  $j$  is the lamella identification number on which the element is located, starting with the innermost lamella. The total number of lamellae is identified by  $n$ . The possible element positions along  $\varphi$  are infinite but are limited in this study to  $m$  discretized planes, each individual plane  $i$  being equally spaced along the entire upper half of the disc, starting with the upper vertebral endplate and ending with the transverse plane of symmetry. The lower half of the disc is simply the mirror of the upper half. The subscripts  $i$  and  $j$  are later appended to the variables that vary with respect to the element location.

Identification of axis  $\varphi$  must not be confused with the angle  $\varphi$ , which is the angle between the axis of revolution  $z$  and the radial axis  $r$ . The angle  $\varphi$  varies with respect to the element location. It is thus later referred to by  $\varphi_{i,j}$ . Any further reference to  $\varphi$  without subscripts is related to the axis  $\varphi$ .  $r_\varphi$  is the element curvature along  $\varphi$  and varies only with the lamella identification number  $j$ . It is thus later referred to by  $r_{\varphi,j}$ .  $R$  is the major radius, as would be defined in a torus, and is constant.  $r_\theta$  is the element curvature along  $\theta$  and varies with  $i$  and  $j$ . It is thus later referred to by  $r_{\theta,i,j}$ .  $r$  is the projection of  $r_\theta$  over the horizontal plane passing through the element. It is later referred to by  $r_{i,j}$ . From now on,  $r$  without subscripts refers to the axis  $r$ .

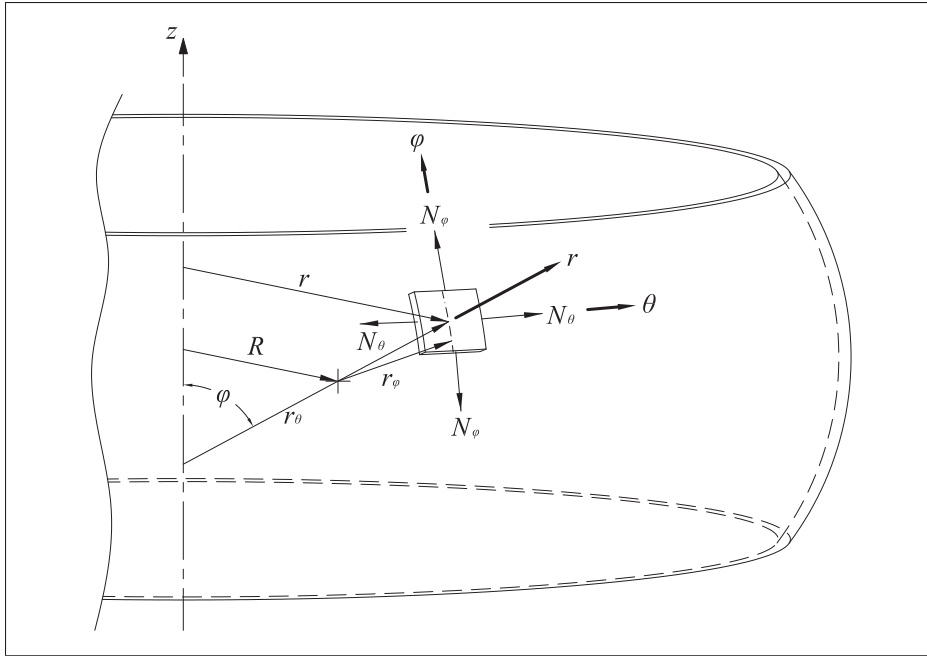


Figure 3.2 Geometry of a single lamella and illustration of an infinitesimal membrane element with its corresponding  $r$ – $\theta$ – $\phi$  coordinate system

The membrane forces in the element are identified by  $N_\theta$  and  $N_\phi$ , to express the force in  $\theta$  and  $\phi$  directions respectively. Both these forces vary with respect to the element location and are expressed in N/mm.

This doubly-curved shape is capable of considering bulge but axisymmetry implies that any circumferential variation is neglected. This limitation will be discussed later because, in fact, the L5–S1 annulus fibrosus has an elliptical shape (Eijkelkamp, 2002). Bulge is defined as the horizontal distance between a perfectly cylindrical lamella and a protruding one with an outward curve or swelling. A bulge of 0.5 mm is estimated at rest. An intradiscal pressure of 1.94 MPa is used in this study based on the results given in Adams *et al.* (1996). The outside radius of the disc is 21 mm, based on the mean value of minor and major axes of an elliptical contour, as described in Prud'Homme (2008). Subtracting the total lamellae thickness yields a nucleus pulposus radius of 16.2 mm. Disc height is 11 mm (Zhou *et al.*, 2000; O'Connell *et al.*,



2010). It must be emphasized that the two adjacent endplates are considered parallel, although a wedge of approximately  $14^\circ$  has been reported for the L5–S1 disc (Prud'Homme, 2008).

Despite non-linear behavior, the annulus material is assumed to be linearly elastic for simplification. Hyperelasticity shall be included once the simplified linear model has demonstrated interesting potential. Based on the work of Holzapfel *et al.* (2005), a mean value of 50.3 MPa is adopted for the modulus of elasticity. Poisson's ratio is assumed to be 0.45, which is justified since the matrix of the annulus fibrosus is nearly incompressible. For further simplification, the anisotropic nature of the lamellae is ignored and none of the connective tissues (i.e. ligaments and muscles) are modeled. Vertebral endplates are assumed flat and rigid (no deformation), which assumption leads to a stress variation around 4% (Little *et al.*, 2007). The Sharpey's fibers, which anchor the lamellae into the endplates, are not included in this study. These carry edge forces and shall be considered in future works. The analytical approach is processed using MATLAB (2009).

### 3.2.2 Static Equilibrium

The analysis is quasi-static and satisfies static equilibrium. Figure 3.3 shows a sagittal section view of the free body diagram of the simplified intervertebral disc. It allows the formulation of a vertical force balance equation to verify static equilibrium :

$$r_{s,i,1}^2 p_{NP} - r_{ep}^2 w - 2 \sum_{j=1}^n (N_{\phi,i,j} r_{i,j} \sin \phi_{i,j}) = 0, \quad (3.1)$$

where  $r_{s,i,1}$  is the horizontal radius taken at the interior surface of the innermost lamella, at plane  $i$ .  $p_{NP}$  is the nucleus pulposus (intra-discal) pressure and  $w$  is the external distributed load.  $r_{ep}$  is the radius of the vertebral endplate. The horizontal radii  $r_{i,j}$  can be written as :

$$r_{i,j} = R + r_{\phi,j} \sin \phi_{i,j}, \quad (3.2)$$

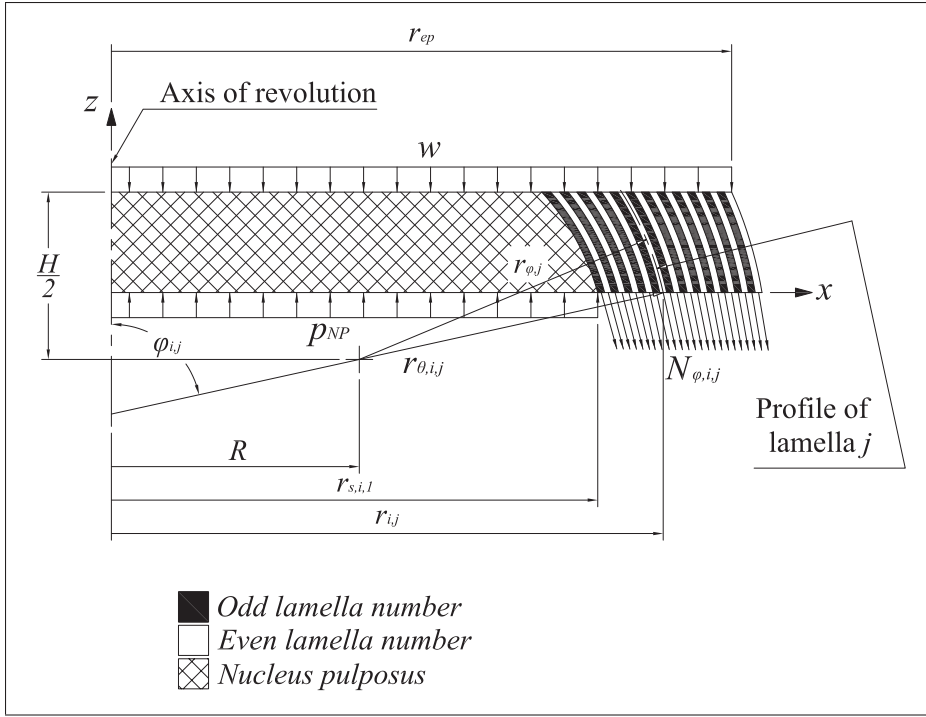


Figure 3.3 Free body diagram of the axisymmetric intervertebral disc, shown in the sagittal section view

Equation (3.1) contains a total of  $n$  unknown membrane forces  $N_{\phi,i,j}$ . With a total of  $m$  equilibrium equations, the total number of unknown variables is actually equal to  $m \cdot n$ . Getting additional equations requires the use of the membrane theory which is also known as the theory of thin shells of revolution. With the assumption that the lamellae thickness to radius ratio is smaller than 0.1, which is verified in this case, shell theory stipulates that the stress distribution through the thickness is uniform. This allows the use of the membrane equation to relate the circumferential stress to the longitudinal stress, based on static equilibrium. The membrane equation can be written for each lamella  $j$  at each plane  $i$  :

$$\frac{N_{\theta,i,j}}{r_{\theta,i,j}} + \frac{N_{\phi,i,j}}{r_{\phi,i,j}} = (p_{s,i,j} - p_{s,i,j+1}) \quad (3.3)$$

A set of  $m \cdot n$  new equations are generated with Eq. (3.3), adding  $m \cdot n$  unknown circumferential membrane forces  $N_{\theta,i,j}$  and  $m(n - 1)$  unknown contact pressures  $p_{s,i,j}$ . The subscript  $s$  indicates that the pressure acts on the interior surface of the lamella  $j$ . It can be noted that

$p_{s,i,1} = p_{NP}$  and  $p_{s,i,n+1} = p_{ext}$ , where  $p_{ext}$  is the pressure outside the disc and is assumed to be zero. The system of  $m(n+1)$  equations has  $m(3n-1)$  variables to be solved. Multi-lamellae interaction is a statically indeterminate problem, which requires additional equations obtained from compatibility of displacements of adjacent lamellae to be resolved.

### 3.2.3 Compatibility of Displacements

The compatibility of displacements is verified assuming that adjacent lamellae cannot interfere nor separate and that lamellae thicknesses remain constant. Calculation of the displacements first requires that the membrane forces in the  $r-\theta-\phi$  coordinate system be transformed into the  $x-y-z$  coordinate system, where  $z$  is upward and  $y$  is the same as  $\theta$ . This is achieved by using equations for stress transformation :

$$N_{x,i,j} = \frac{N_{\phi,i,j}}{2} (1 - \cos 2\Omega_{i,j}) \quad (3.4)$$

$$N_{y,i,j} = N_{\theta,i,j} \quad (3.5)$$

$$N_{z,i,j} = \frac{N_{\phi,i,j}}{2} (1 + \cos 2\Omega_{i,j}), \quad (3.6)$$

where  $\Omega_{i,j}$  is the complementary angle of  $\phi_{i,j}$ . Radial and shear stresses are neglected.

Strains can now be expressed in the  $x-y-z$  coordinate system using Hooke's law :

$$\epsilon_{x,i,j} = \frac{1}{Et_j} [N_{x,i,j} - \nu (N_{y,i,j} + N_{z,i,j})] \quad (3.7)$$

$$\epsilon_{y,i,j} = \frac{1}{Et_j} [N_{y,i,j} - \nu (N_{x,i,j} + N_{z,i,j})] \quad (3.8)$$

$$\epsilon_{z,i,j} = \frac{1}{Et_j} [N_{z,i,j} - \nu (N_{x,i,j} + N_{y,i,j})] \quad (3.9)$$

where  $t_j$  is the lamellae thickness, and  $E$  and  $\nu$  are respectively the modulus of elasticity and the Poisson ratio of the lamellae material.

The first set of compatibility equations is obtained from the condition that the horizontal displacement  $\delta_x$  (along the  $x$  axis) of the lamella  $j$  at plane  $i$  must be equal to that of the lamella  $j + 1$  at plane  $i$  :

$$\delta_{x,i,j} = \delta_{x,i,j+1} \quad \forall j \in [1, n-1] \quad (3.10)$$

Equation (3.10) can be combined with Eqs. (3.4) to (3.9) to give the final set of equations for the compatibility of horizontal displacements :

$$\frac{r_{\theta,i,j}}{Et_j} [N_{\theta,i,j} - \nu N_{\phi,i,j}] \cos \Omega_{i,j} = \frac{r_{\theta,i,j+1}}{Et_{j+1}} [N_{\theta,i,j+1} - \nu N_{\phi,i,j+1}] \cos \Omega_{i,j} \quad \forall j \in [1, n-1] \quad (3.11)$$

The second set of compatibility equations is obtained by hypothesising that the vertical displacement  $\delta_z$  (along the  $z$  axis) of the lamella  $j$  at plane  $i$  are equal to that of lamella 1 at plane  $i$  :

$$\delta_{z,i,j} = \delta_{z,i,1} \quad \forall j \in [2, n] \quad (3.12)$$

To evaluate the vertical displacement of an infinitesimal membrane element located on plane  $i$ , it is necessary to sum the vertical elongation  $\Delta h_{i,j}$  of all the elements below it, that is from plane  $i$  to plane  $m$  :

$$\delta_{z,i,j} = \sum_{c=i}^m \Delta h_{c,j}, \quad (3.13)$$

where individual  $\Delta h_{i,j}$  are calculated by multiplying the height intervals  $h_i$ , defined astride their corresponding planes  $i$  as shown in Fig. 3.4, by the vertical strains  $\epsilon_{z,i,j}$  :

$$\sum_{c=i}^m \Delta h_{c,j} = h_1 \epsilon_{z,1,j} + \sum_{c=2}^m h_c \epsilon_{z,c,j} \quad \text{for } i = 1 \quad (3.14)$$

$$\sum_{c=i}^m \Delta h_{c,j} = \frac{h_i}{2} \epsilon_{z,i,j} + \sum_{c=i+1}^m h_c \epsilon_{z,c,j} \quad \forall i \in [2, m-1] \quad (3.15)$$

$$\Delta h_{m,j} = h_m \epsilon_{z,m,j} \quad \text{for } i = m \quad (3.16)$$

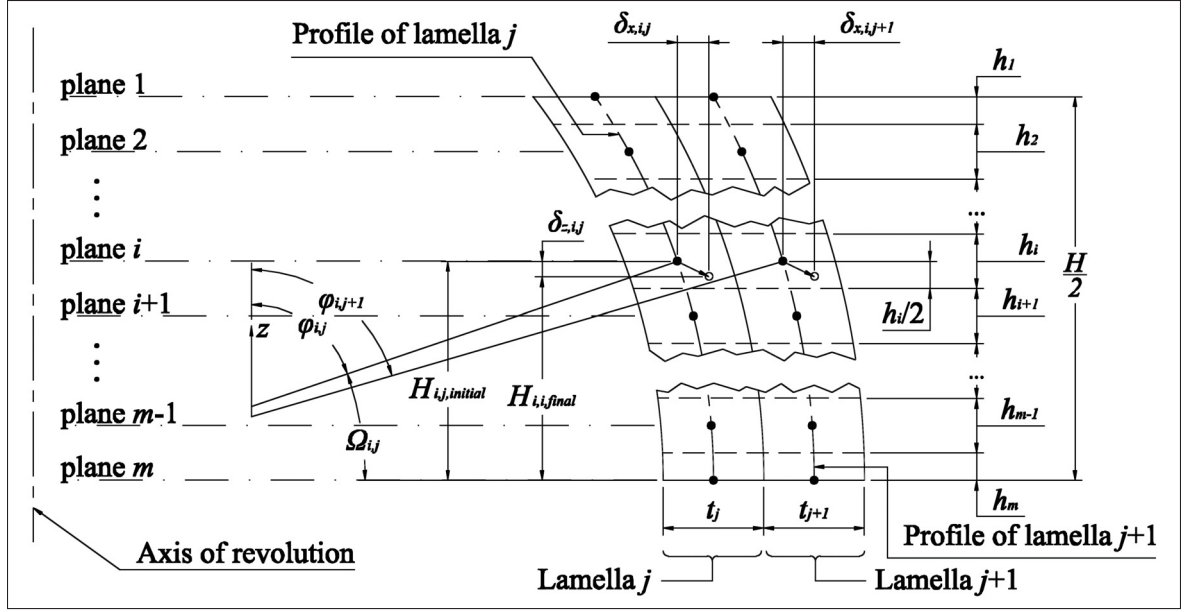


Figure 3.4 Compatibility of displacements

Using Eqs. (3.12) to (3.16), the detailed set of equations for the compatibility of vertical displacements can be written as :

$$h_1 \epsilon_{z,1,j} + \sum_{c=2}^m h_c \epsilon_{z,c,j} = h_1 \epsilon_{z,1,1} + \sum_{c=2}^m h_c \epsilon_{z,c,1} \quad \text{for } i = 1 \quad (3.17)$$

$$\frac{h_i}{2} \epsilon_{z,i,j} + \sum_{c=i+1}^m h_c \epsilon_{z,c,j} = \frac{h_i}{2} \epsilon_{z,i,1} + \sum_{c=i+1}^m h_c \epsilon_{z,c,1} \quad \forall i \in [2, m-1] \quad (3.18)$$

$$\epsilon_{z,m,j} = \epsilon_{z,m,1} \quad \text{for } i = m \quad (3.19)$$

### 3.2.4 Longitudinal and Circumferential Stresses

Dividing the membrane forces by the thickness of the lamellae gives the equations for the longitudinal membrane stress  $\sigma_\varphi$  and the circumferential membrane stress  $\sigma_\theta$  :

$$\sigma_{\varphi,m,j} = \frac{N_{\varphi,m,j}}{t_j} \quad (3.20)$$

$$\sigma_{\theta,m,j} = \frac{N_{\theta,m,j}}{t_j} \quad (3.21)$$

### 3.2.5 Large Deformation

Because of the low modulus of elasticity of soft tissues, it is expected that large deformation occurs. This can lead to a significant difference between the theoretical calculations and the finite element analysis, noting that an option for large deformation is already available in the latter. Therefore, an iterative method is applied to the analytical model to correct for the geometry as a result of large deformation. After initial resolution of the set of equations, the displacements of the lamellae are obtained. The geometry is then updated accordingly, before reintroduced into the updated set of equations to be solved again. This process is repeated until convergence, summing the displacements to the initial geometry at each iteration.

### 3.2.6 Finite Element Models

Two finite element models were built using ANSYS (2007) for the purpose of validating the developed analytical solution. In the first model, the interactions between adjacent lamellae were simulated using coupled degrees of freedom (CDOF). In the second model, they were simulated using contact elements. Contact elements include many more features for future developments and allow a comparison of the contact pressures obtained with the analytical model while CDOF do not.

In both cases, SHELL209 elements were used to model the lamellae. These are three nodes axisymmetric shell elements having three degrees of freedom per node – two translational and one rotational. The membrane option was not used, but it can be demonstrated that using the membrane option yields similar results to those obtained midway into the thickness of the lamellae using the shell option with thin walls. For the second FE model, contact elements of type CONTA172 were used in pair with target elements of type TARGE169 with no friction.

Internal pressure is applied to the inner surface of the innermost lamella and no vertebral endplate is included as to simulate the open ended simplification used in the analytical model. To avoid singularity, all nodes located on the transverse plane are constrained in the vertical direction. All upper and lower nodes of the model are respectively coupled together in the vertical direction, so as to reflect the rigid vertebral endplates, which cannot deform but can move vertically. As mentioned above, the first version uses CDOF to avoid relative displacements between the lamellae. The displacements are thus coupled in the horizontal and the vertical directions for nodes located at the same height along the annulus.

Material properties are the same as those used in the analytical model. The first model converged with 20 elements per lamella while the second model converged with 120 elements per lamella. The results obtained at the mid thickness of the lamellae are compared to the analytical results.

### 3.3 Results

In this study,  $m$  is chosen as 5 in order to generate enough data to plot distributions curves over the entire height of the disc. This generates a set of 355 equations. The process time on a T2400 dual core processor running under Microsoft Windows XP is around five minutes for one iteration and close to 38 minutes to convergence (six iterations). However, using an  $m$  value of 2 cuts the total time down to 9.5 minutes, affecting the circumferential stress at the transverse plane by only 0.05% and having no noticeable effect at the endplates. Its effect on longitudinal stress is 0.1% at the transverse plane and 0.2% at the endplates.

Figure 3.5 shows the percentage difference between the analytical and the FE circumferential stresses on the innermost lamella at the transverse plane, as a function of the iteration number for large deformation. The convergence criteria is based on the circumferential stress because of its relative importance. In addition, the circumferential stress is expected to be larger at the innermost lamella (as is the case in thick-walled pressure vessels) and the membrane solution

is expected to represent the overall solution far from the edges, i.e. at the transverse plane. Convergence is reached after six iterations.

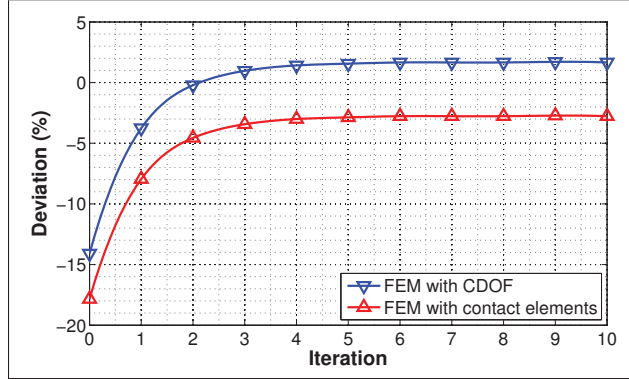


Figure 3.5 Convergence of the analytical model with respect to FEM

In Fig. 3.6 (a) and (b), the longitudinal and circumferential stresses in the two extreme lamellae are respectively plotted against the height of the disc, comparing the analytical small and large deformation solutions to FEM. While small deformation gives reasonable values of longitudinal stress, the circumferential stresses are underestimated. Both the longitudinal and circumferential stress curves clearly demonstrate that large deformation solution gives better predictions. It should be mentioned that the two circumferential stresses shown at the edges with FEM using contact elements are due to the particular boundary condition used. For each lamella, the displacements of the last two nodes at both edges were coupled horizontally. An alternative boundary condition could be to couple the rotations of the edge nodes. This has shown to give comparable results. In view of this boundary condition, the results for FEM using contact elements should only be considered for nodes far from the edges.

Longitudinal and circumferential stresses at the transverse plane are respectively shown in Fig. 3.6 (c) and (d). When compared to FEM using CDOF, the analytical longitudinal stress without considering large deformation shows an error of 7.5% at the innermost lamella and 9.7% at the outermost lamella. After convergence, this error drops to 4.6% at the innermost



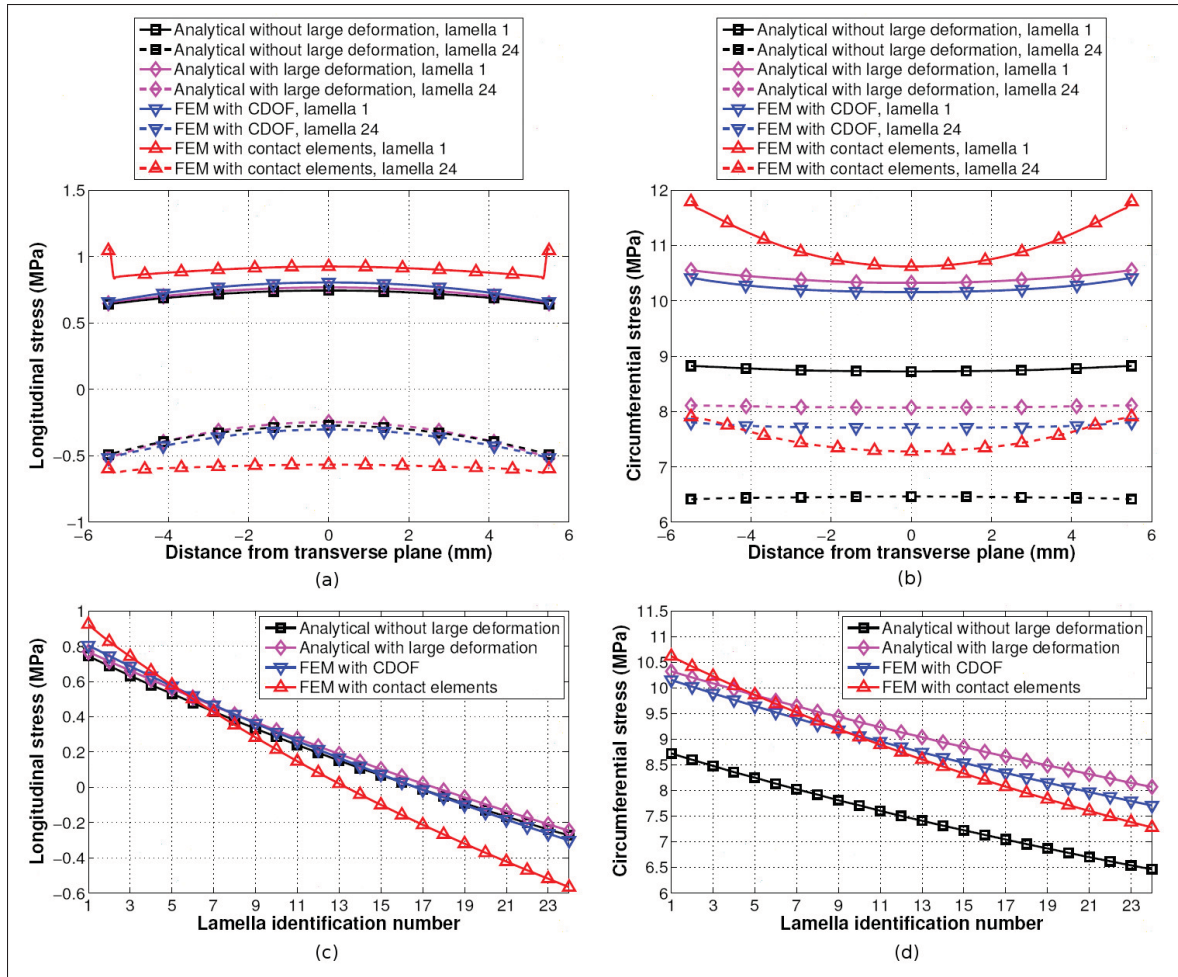


Figure 3.6 Membrane stresses (a) Longitudinal stresses along the height of the disc (b) Circumferential stresses along the height of the disc (c) Longitudinal stresses across the lamellae at the transverse plane (d) Circumferential stresses across the lamellae at the transverse plane

lamella but rises to 18.4% at the outermost lamella. When compared to FEM using contact elements, the analytical longitudinal stress without considering large deformation shows an error of 19.7% at the innermost lamella and 51.9% at the outermost lamella. After convergence, this error drops to 16.9% at the innermost lamella but rises to 56.7% at the outermost lamella.

When compared to FEM using CDOF, the analytical circumferential stress without considering large deformation shows an error of 14.1% at the innermost lamella and 16.1% at the outermost lamella. After convergence, this error drops to 1.7% and 4.7% respectively. When compared

to FEM using contact elements, the analytical circumferential stress without considering large deformation shows an error of 17.8% at the innermost lamella and 11.2% at the outermost lamella. After convergence, this error drops to 2.8% and 10.9% respectively.

Differences are lower at the innermost lamella because the displacements of this lamella are used as a reference for updating the geometry. The use of displacements of each lamella to update each corresponding geometry could improve the accuracy of the stresses across the annulus. Stresses at the transverse plane decrease almost linearly from the innermost lamella to the outermost lamella. With FEM using contact elements, the decreasing rate is greater and non-linearity is more pronounced. These figures show that, with contact elements, the lamellae close to the nucleus pulposus carry more load than suggested by the other models. This difference is more significant with longitudinal stresses. However, longitudinal stresses are of lower magnitude than circumferential stresses. For the innermost lamella, at the transverse plane, the Von Mises equivalent stress is 9.8 MPa with CDOF and 10.2 MPa with contact elements. Analytically, this stress is 10.0 MPa, which falls in between both FEM Von Mises stresses. Although Von Mises criteria is not suitable for analysing the rupture of the annulus fibrosus because of its anisotropic nature, it is interesting to note that the error involved with CDOF, when compared to contact elements, is less than 4% with isotropic materials. The difference between the analytical model and each of the two FE model is even lower.

Figure 3.7 compares the contact pressures obtained with and without considering large deformation together with those of FEM using contact elements. The maximum absolute difference between analytical and FEM is located between the lamellae 12 and 13 with a relative difference of 6.5%. It can be seen in Fig. 3.7 that the contact pressure is non-linearly decreasing and that distribution curves from all models are found to be practically superimposed one on the top of the other.

Figure 3.8 shows the radial displacements of the lamellae at the transverse plane. When not considering large deformation, the analytical model underestimates the displacement by 22.4% when compared to FEM using CDOF. However, large deformation leads to an overestimation of

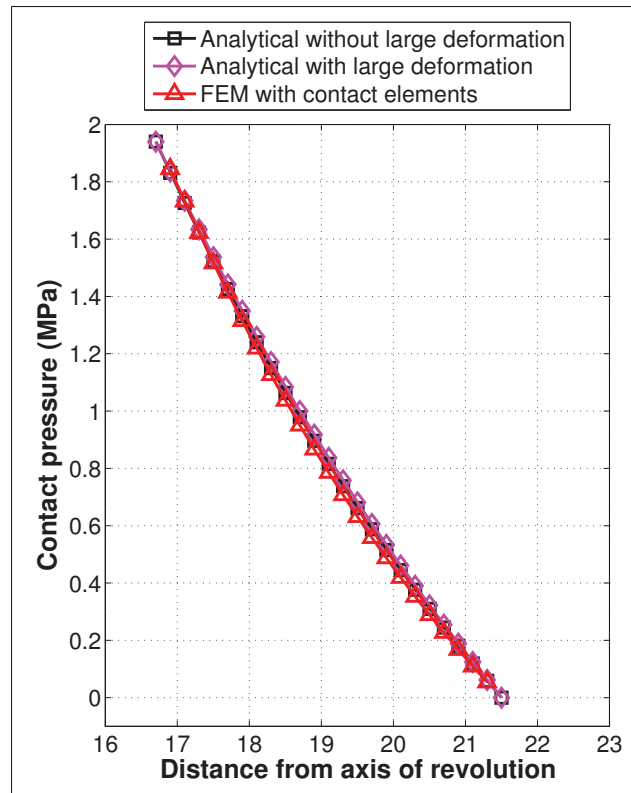


Figure 3.7 Contact pressures between adjacent lamellae

15.2%. Although stresses can be accurately estimated, calculation of the displacements yields considerable differences. With contact elements, the displacement of the innermost lamella at the transverse plane is greater than that of FEM using CDOF by 4.6%. On the counterpart, the displacement of the outermost lamella at the transverse plane is lower than that of FEM using CDOF by a value of 4.2%. The displacement variation can be explained by the decrease in thickness caused by the radial compression of the lamellae. This compression is ignored with CDOF and with the analytical model.

### 3.4 Discussion

The differences between the results of the FE model using contact elements and the ones using CDOF are significant. Although the CDOF model is closely related to the conditions set for compatibility of displacements in the analytical model, it is believed that the use of contact

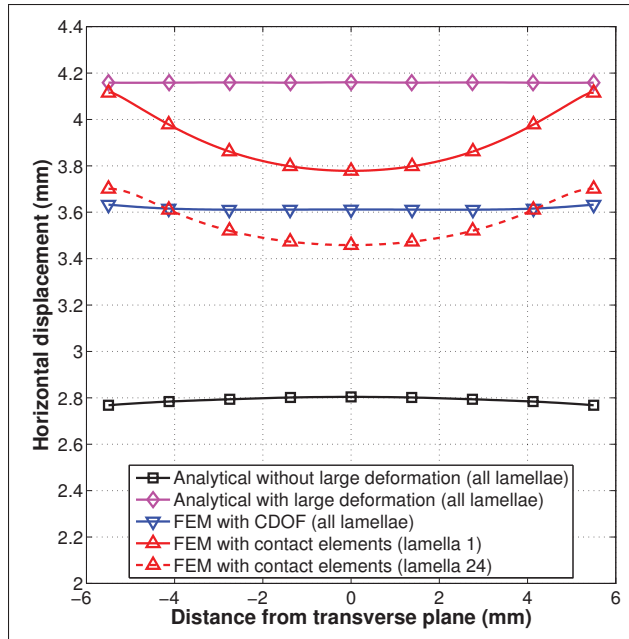


Figure 3.8 Radial displacements along the height of the disc

elements is more representative of the behavior of the annulus fibrosus. Whether this is true with a failure criteria appropriate for anisotropic materials remains to be investigated.

Figure 3.7 shows that the intradiscal pressure starts decreasing immediately at the innermost lamella. According to Adams *et al.* (1996), compressive stresses measured horizontally and vertically extend well beyond the boundary of the nucleus, such that only the outermost 2 to 4 mm annulus behave like a tensile membrane. However, the horizontal and vertical measurements differ from one another in the annulus, indicating that the inner annulus does not behave exactly the same as the nucleus. Direct comparison with the stress profile of Fig. 3.7 would be possible only if the radial compressive stress was experimentally measured, noting that the horizontal direction defined in Adams *et al.* (1996) corresponds to the circumferential direction defined in this model. Nevertheless, it is deemed reasonable to expect that a constant radial compressive stress would extend as well into the annulus before starting to decrease, because of the osmotic effect, which is not included in the model. The vertical compressive stress could be accounted for in the model by adjusting transverse cross-sections to fit the specimens used in the expe-

riments. For any model based on static equilibrium, it is critical that such dimensional data are given along with force and pressure measurements. Consequently, validation will be possible only when such data are available altogether. In addition, as the effective nucleus grows and the intradiscal pressure relaxes (Chagnon *et al.*, 2010), equilibrium forces in the lamellae change. It has been shown that the width of this effective nucleus, characterised by the hydrostatic pressure, remains largely unaffected by severe creep loading (Adams *et al.*, 1996). Thus, it could be possible to include creep effect in a quasi-static analysis if the width of the effective nucleus was known from experimental data. With regards to Eqs. (3.1) and (3.3), the effect of hydrostatic pressure spreading across the first few lamellae should lead to a decrease in circumferential stresses at these lamellae. This may affect the predicted location for maximum stresses in the annulus. However, this does not imply that damage initiation is not likely to occur in the innermost lamella. Indeed, identifying the location for damage initiation depends on stress intensity but also on the existence of delaminated regions or to tissue resistance to delamination (Gregory *et al.*, 2012). Delamination, in turn, depends on transmellar cross bridges and layer adherence, which are still under investigations (Schollum *et al.*, 2009; Smith et Elliott, 2011; Gregory *et al.*, 2012). It has been observed that resistance to delamination is lower for deeper lamellae (Gregory *et al.*, 2012), which could lead to preferred delamination initiating in the latter, depending on relative strains between regions.

From bulge measurements presented in Wenger et Schlegel (1997), a mean value of 0.52 mm can be calculated for anterior and lateral regions under a 2500 N compressive load. In contrast, O'Connell *et al.* (2010) reported a median of 0.61 mm for inner AF at anterior and lateral regions, under a compressive load of 1000 N. Posterior elements were resected in both studies. On their part, Heuer *et al.* (2008a) found a corresponding value of 0.75 mm for a 500 N compressive load. Discrepancies exist between these three experimental studies as one could expect that increasing the load would further increase disc bulge. Regardless of these discrepancies, the displacements presented in Fig. 3.8 are much higher than the experimentally measured values. This is mainly because the effects of the Sharpey's fibers are not included in the models

of this study. These will restrain the overall displacements as they anchor the lamellae into the vertebral endplates, creating edge effects.

The height decrease of 7.9% calculated in the model seems to compare well with the published value of 6.7% (O'Connell *et al.*, 2010). However, the load used in this study is 2.5 times higher and the transverse cross-section is lower by 33%. Direct comparison is thus not possible but quite revealing of the true behavior. In addition, inclusion of the Sharpey's fibers and material anisotropy and non-linearity could influence the overall solution.

Although the model requires further improvements, the validation with the experimental data available in the literature demonstrates that multi-shell analysis presented in this study offers an innovative approach to analyse disc stresses. This represents a breakthrough in the analytical study of disc herniation. On a practical point of view, it allows a qualitative comparison of the stresses across the height and depth of the annulus fibrosus and a study of the influence of parameters such as lamellae thickness, disc dimensions and compression load. Further studies should include the effect of the Sharpey's fibers, material anisotropy and material non-linearity and consider other types of loading, such as flexion and torsion. Only then will it be possible to get a realistic analytical quantitative evaluation of stresses and displacements in an intervertebral disc. Experimental studies should supplement actual literature with radial, horizontal and vertical pressure distributions along with dimensional data, especially cross-sections, and bulge values. Once this model is validated with such data and above suggested improvements are implemented, it will be possible to apply a failure criterion and verify the limits of various lifting tasks. Comparison with the NIOSH equation by evaluation of critical single load handling in a standing posture should then be made to support or improve current ergonomic tools for the evaluation of lifting activities. Furthermore, a comparison with a state-of-the-art finite element model should be conducted to verify whether the simplified finite element model yields acceptable results. However, it must be emphasized that even the more advanced FE model cannot be blindly trusted without being itself validated with other studies.

### 3.5 Conclusion

This study presented a method for analysing the stresses and displacements in a multi-shell intervertebral disc using membrane theory with large deformation. The indeterminate problem was solved with the formulation of conditions for the compatibility of displacements between the lamellae, which allow the simulation of lamellae interactions. Other conditions for compatibility of displacements could be studied to investigate the effects of translamellar cross bridges and layer adherence in deeper details, offering flexibility to the model and the possibility to study delamination. This innovative capability can be interesting to study other biomechanical applications, such as blood arteries, articular cartilage and other multi-layer human structures. The developed multi-shell model including the large deformation option is an accurate approach in predicting membrane stresses across a multi-layered, barrel shaped pressure vessel made of soft isotropic materials. Further improvements of the model and additional experimental studies are necessary to validate its ability to simulate the complex behavior of an intervertebral disc. Among such improvements, there is the inclusion of the Sharpey's fibers and material anisotropy and non-linearity. Despite major simplifications, this model offers the flexibility for realistic modeling of the intervertebral disc and represents an advance in the analytical study of disc herniation.

### Acknowledgment

The authors would like to thank the *École de technologie supérieure de Montréal*, the *Équipe de recherche en sécurité du travail (ÉREST)*, the *Fonds de recherche Santé Québec (FRSQ)*, the *Fonds de recherche Nature et technologies Québec (FQRNT)*, the *Fonds de recherche Société et culture (FQRSC)*, and the *Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST)* for financing an important part of this study.

### Nomenclature

$E$	Young's modulus for annulus fibrosus (MPa)
$h$	Height of an interval resulting from the discretization of the lamellae (mm)

$H$	Height of the intervertebral disc (mm)
$i$	Equilibrium plane identification number ( $1 \leq i \leq m$ )
$j$	Lamella identification number ( $1 \leq j \leq n$ )
$m$	Total number of equilibrium planes on the upper half of the disc, including the transverse plane
$n$	Total number of lamellae
$N$	Membrane force (N/mm)
$p_{ext}$	External pressure (MPa)
$p_{NP}$	Intradiscal pressure (MPa)
$p_{s,i,j}$	Contact pressure between two adjacent lamellae (MPa)
$r_{\varphi}$	Longitudinal radius (mm)
$r_{\theta}$	Circumferential radius (mm)
$r_{ep}$	Endplate radius (mm)
$r_{i,j}$	Horizontal radius at a given point on a lamella (mm)
$r_{s,i,j}$	Horizontal radius at a given point on the inside surface of a lamella (mm)
$R$	Center of curvature for lamellae profiles (mm)
$t$	Lamella thickness (mm)
$w$	Distributed load on the disc (MPa)
$\delta$	Displacement (mm)
$\Delta h$	Variation of $h$ due to strain (mm)
$\varepsilon$	Membrane strain (mm/mm)
$\nu$	Poisson's ratio for annulus fibrosus
$\Omega$	Complementary angle of $\varphi$ ( $^{\circ}$ )
$\varphi$	indicates the angular coordinate describing the angle between the axis of revolution and the normal to the lamella at a specified point ( $^{\circ}$ )
$\sigma$	Membrane stress (MPa)
$\theta$	Circumferential direction



**Subscript**

$\varphi$  indicates the longitudinal direction



## **CHAPITRE 4**

### **ARTICLE 2 : EFFECT OF SHARPEY'S FIBERS ON THE STRESS DISTRIBUTION IN THE ANULUS FIBROSUS OF AN INTERVERTEBRAL DISC SUBJECTED TO COMPRESSION**

Sébastien Demers<sup>1</sup>, Abdel-Hakim Bouzid<sup>1</sup>, Sylvie Nadeau<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure,

1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, Québec, Canada H3C 1K3

Article soumis à la revue « International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering » en octobre 2015.

Manuscript CNM-Oct-15-0208

#### **Résumé**

Le premier article de cette thèse a démontré que la théorie des membranes était capable de tenir compte des multiples lamelles de l'anneau fibreux et des grandes variations de la géométrie. L'ancrage des lamelles dans les plateaux vertébraux par l'insertion des fibres de Sharpey a toutefois été négligé, empêchant du même coup la déformation réaliste de l'anneau fibreux et la représentation juste de la distribution des contraintes dans les lamelles.

Ce deuxième article présente une amélioration du modèle de l'article précédent en simulant l'effet des fibres de Sharpey à l'aide de la théorie des poutres sur fondation élastique. Le chargement simulé demeure la compression uniaxiale, qui est représentée par une pression hydrostatique uniforme en substitution du noyau pulpeux. Afin de vérifier l'effet des conditions imposées aux frontières, les résultats de contraintes sont déterminés pour un cas où les fibres de Sharpey ne supportent aucun moment, et pour un cas où un moment fléchissant est imposé, limitant ainsi la rotation des lamelles aux points d'insertion dans les plateaux vertébraux.

Les résultats montrent que la contrainte circonférentielle prédomine sur la contrainte longitudinale et qu'elle est maximale au plan transversal, soit à mi-chemin entre les plateaux vertébraux.

Cette contrainte diminue considérablement près des plateaux vertébraux. Ces résultats correspondent à ceux d'un modèle d'analyse par éléments finis simplifié et développé aux fins de comparaison. Cette étude démontre le potentiel de la théorie des poutres sur fondation élastique pour simuler l'effet des fibres de Sharpey. Il est cependant recommandé d'améliorer la représentation du profil des lamelles, qui subissent des déformations complexes.

## **Abstract**

Theoretical analyses of stress and strain in intervertebral discs have received very little attention in the scientific literature, while most of the research efforts focused on experimental and finite element studies. Constitutive modeling using the finite element method is undoubtedly effective and powerful. However, due to technical difficulties, few model variables can be verified by experimental measurements, which complicates model validation. Triangulation of methodologies would reinforce model reliability, and could be achieved by developing the analytical approach. As a first step towards the development of a realistic analytical model, this study examines the potential of thin-shell theory and beam-on-elastic-foundation theory for simulation of the anulus fibrosus multi-shell structure and the endplate anchorage of lamellae via Sharpey's fibers. The model is based on a simplified axisymmetric disc subjected to axial compression and takes into account large deformations of the disc. The performance of the model was compared to that of a simplified finite element model. The two models responded similarly, showing that circumferential stress is greater than longitudinal stress, that stress is maximal at the transverse plane, and that circumferential stress decreases significantly towards the endplates. The results demonstrate that beam-on-elastic-foundation theory is applicable to simulation of Sharpey's fiber effects and should be considered for use in the analytical study of intervertebral discs. Future research should focus on realistic representation of the complex changes in lamellar geometry due to large deformation, and on inclusion of material anisotropy and hyperelasticity, asymmetric geometry and complex loadings.

**Keywords :** Anulus fibrosus ; Sharpey's fibers ; Stress analysis ; Lamellae ; Bulge ; Modeling

## 4.1 Introduction

Intervertebral discs (IVD) cushion the absorption of energy by the spine and serve as articulations, thus ensuring spinal resilience and flexibility. Each IVD is composed of a nucleus pulposus (NP) and an annulus fibrosus (AF). The AF can be damaged under excessive loads that combine compressive force with flexion or torsion, ultimately leading to disc herniation (Adams et Roughley, 2006; Gunzburg *et al.*, 1992; Roaf, 1960). Disc responses to external loads remain poorly understood, and better knowledge of disc behavior is needed in order to improve recommendations made for the purpose of decreasing the incidence of work-related back injury.

In healthy discs under quasi-static conditions, pressure inside the NP is assumed to be hydrostatic (Nachemson, 1960). The AF is a highly organized structure made of 15 to 25 concentric lamellae (Marchand et Ahmed, 1990) surrounding the nucleus. Each lamella is a composite material made of collagen fibers oriented at an angle varying from approximately  $20^\circ$  to  $50^\circ$  relative to the horizontal plane (Holzapfel *et al.*, 2005) and embedded in a hydrophilic matrix. The lamellae are anchored in endplates by Sharpey's fibers, which consist of collagen fibers and elastic fibers. The nucleus and annulus matrices bear most of the compressive forces applied axially to a disc. As intradiscal pressure due to such forces rises, the load is transferred to the AF collagen fibers, which act in tension (Smith et Fazzalari, 2009; Spivak et Connolly, 2006), as in a pressure vessel (Karajan, 2012; Hukins, 1992). In bending and axial torsion, ligaments and facets add significant stiffness to the motion segment (Spivak et Connolly, 2006).

The finite element (FE) method is used widely to estimate stress and strain in IVDs. Due to the slow development of alternative approaches, validation of such estimates has been based on experimental results, on other finite element studies, or obtained by inference using other characteristics of the models. In addition, FE models are often calibrated for specific conditions and based on expected results (Schmidt *et al.*, 2007a; Ezquerro *et al.*, 2011), making their use in new investigations questionable when other methods have not been developed to corroborate the findings (Guo *et al.*, 2012). The material property uncertainties and complex geometries of

biological tissues represent huge challenges for numerical models, and every effort should be made to ensure that an FE model is validated before any claim is made about its clinical value (Viceconti, 2005).

Analytical modeling offers an attractive way of achieving methodological triangulation. No model developed so far from the theory of thick cylinders (Hukins, 1992; Hickey et Hukins, 1980; Prud'Homme, 2008), incompressible fluid volume balance (Broberg et von Essen, 1980; Broberg, 1983; Klein *et al.*, 1983), static equilibrium and membrane theory (McNally et Arridge, 1995), or composite materials theory (Iatridis et ap Gwynn, 2004) takes AF multi-shell structure, disc bulge, soft tissue deformation or anchorage via Sharpey's fibers into consideration simultaneously. In a recent multi-shell model (Demers *et al.*, 2013) that considers the lamellae as elementary structural units (Holzapfel *et al.*, 2005), disc bulge and large deformations are simulated using a simplified geometry, but attachment of lamellae to vertebral endplates is neglected

In the context of IVD, the role of Sharpey's fibers is viewed generally as anchoring the superficial lamellae of the anulus to the vertebral ring epiphysis (Karajan, 2012; Eijkelkamp, 2002). However, any fibers attaching the deep lamellae and the superficial zone of the nucleus to the hyaline cartilage endplate may be called Sharpey's fibers (Johnson *et al.*, 1982). In the present study, fibers anchoring the lamellae to the vertebral endplates or to the vertebral bodies are all treated as Sharpey's fibers. In-depth analysis of the IVD-endplate interface has revealed that inner lamellar fibers penetrate the calcified region of the endplate, while in the outer lamellae, some fibers penetrate the calcified region and others bend at 90° to penetrate sideways into the vertebral periphery (Paietta *et al.*, 2013; Nosikova *et al.*, 2012). A study of ovine lumbar spine segments (Rodrigues *et al.*, 2012) has suggested a simple model that represents shear stress acting on the embedded surface of Sharpey's fibers and how the surrounding matrix could attenuate acute bending during bulging of the disc. However, no quantitative data on the Sharpey's fiber stress-strain relationship or resistance to bending are available. It is nevertheless well established that these fibers are strong enough to cause vertebral endplate avulsions (Bonneville *et al.*, 1989). Anchorage restricts radial expansion of the lamellae and induces edge effects such

as those created at the junction of a flat head and a pressure vessel. The theory of beams on elastic foundations (Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959; Roark *et al.*, 2002) is useful for analyzing such discontinuity stresses in structures in general and pressure vessels in particular.

Our goal being to develop a realistic analytical model of IVD, the objective of the present study was to examine the potential of the thin-shell and beam-on-elastic-foundation theories as tools for simulating AF multi-shell structure and endplate anchorage of lamellae via Sharpey's fibers. The axisymmetric analytical model was subjected to a quasi-static compression load and compared to a simplified finite element model and published experimental data.

## 4.2 Methods

Analytical modeling is advancing very slowly and still requires many simplifying assumptions that have yet to be validated in the IVD context, and it is premature to expect the models to agree with published experimental data. A FE model using similar assumptions was therefore developed for comparison and to suggest improvements to the analytical model.

The AF is treated as a multi-shell pressure vessel in which the NP is replaced by hydrostatic pressure. It is simplified to an axisymmetric barrel in which each lamella is predefined with a circular arch in the sagittal plane (Marchand et Ahmed, 1990), as illustrated in Fig. 4.2 (a). The initial outward bulge is set arbitrarily at 0.5 mm since the limited experimental data available do not suggest a more appropriate value. A constant thickness of 0.2 mm is assigned to each of the 24 lamellae to represent average values measured in young discs (Marchand et Ahmed, 1990; Cassidy *et al.*, 1989), even though lamella thickness has been found to vary with age and disc region. Disc initial height is 11 mm (O'Connell *et al.*, 2010; Zhou *et al.*, 2000) and the outer radius is 21 mm (Demers *et al.*, 2013). The two adjacent vertebral endplates are considered flat, parallel, and rigid, despite the presence of a wedge (Prud'Homme, 2008). The rigid endplate assumption implies a stress variation of about 4% (Little *et al.*, 2007). Although the AF material responds in a non-linear manner, it is modeled as linearly isotropic with a Young's modulus  $E$  of 50.3 MPa, based on average experimental values (Holzapfel *et al.*, 2005) and a

Poisson's ratio  $\nu$  of 0.45, that is, nearly incompressible. The material stiffness is considered constant throughout the AF thickness, even though outer lamellae have been found to be stiffer than inner lamellae (Holzapfel *et al.*, 2005; Skaggs *et al.*, 1994). Ligaments and muscles are excluded for simplification. An intradiscal pressure of 1.94 MPa is assumed to correspond to a quasi-static compression load of about 2000 N on the lumbar discs (Adams *et al.*, 1996), which characterizes material-handling activities of moderate intensity (Nachemson, 1981). For simplification, resistance to compression due to the anulus ground substance and swelling pressure is not included in the model. The 2000 N load is thus corrected on the basis of the NP area to overall disc area ratio measured at either endplate so that equilibrium at the endplate interfaces is satisfied with NP pressure alone, giving a corrected load of 1600 N. Sharpey's fibers are simulated by imposing boundary conditions set on the assumption that these fibers have relatively high strength and stiffness compared to crimped lamellae in the AF (Smith et Fazzalari, 2009).

#### 4.2.1 Finite Element Model

The finite element model is developed using ANSYS 14 software (ANSYS, 2011). The axisymmetric shell elements SHELL209 correspond to the AF thin lamellae. The optional flexural stiffness capability is activated for these elements. Contact elements CONTA172 correspond to the contacting interface between the lamellae. Options are set to prevent layer separation and to allow sliding without friction. In spite of recent studies of lamellae interaction (Gregory *et al.*, 2012; Smith et Elliott, 2011; Schollum *et al.*, 2009), shear stiffness or frictional contact between lamellae remain unknown. The nucleus pressure is modeled as a uniformly distributed load acting on the inside surface of the innermost lamella. Vertical coupling of the endplate node degrees of freedom provides simulation of endplate rigidity. The contact elements at the lamellae interfaces are used to simulate the supporting effect of the surrounding matrix as explained elsewhere (Rodrigues *et al.*, 2012). The model of Sharpey's fiber anchorage in the endplates considers constrained horizontal movement. The vertical degree of freedom of the nodes located at the mid-transverse plane is constrained to avoid rigid body displacements. Mesh



convergence is considered achieved when the difference in circumferential stress between two consecutive mesh refinements at the innermost lamella is less than 1%.

#### 4.2.2 Analytical Model

The analytical simulation consists of a two-step method programmed in Matlab R2012 (MATLAB, 2012). The first step consists of evaluating pressure-induced stresses by membrane analysis and yields the membrane solution (Zingoni, 1995). The second step consists of applying edge loads caused by Sharpey's fibers to re-establish the end conditions, thus yielding the discontinuity solution. The stress and strain total solution is obtained by combining the effects of intradiscal pressure and edge loads.

To account for large deformation of soft tissue without introducing significant error, the load is applied in small increments, and the geometry is updated after each increment. The acceptable load increment is obtained as shown in Fig. 4.1 (a) by solving for the pressure effect. The geometry is updated on the basis of displacement due to the initial pressure increment (i.e. the total pressure), and a new solution is obtained with the updated geometry. The difference in circumferential stress between the initial and updated geometry is calculated for the innermost lamella at the mid-transverse plane. If the difference is greater than 1%, the entire procedure is repeated with the pressure increment reduced by half until the difference drops below 1%. Because of the error associated with the rigid endplate assumption, the 1% criterion is deemed acceptable.

The load increment is then used in the membrane and discontinuity analyses as shown in Fig. 4.1 (b). The lamellae geometry in the sagittal plane is updated with each increment until the total pressure has been applied. The results are then superposed to obtain the total stresses and displacements. The lamellae profiles are approximated as circular arches in each step of the analysis using three points : the Sharpey's fibers anchoring points at the upper and lower vertebral endplates (respectively UVE and LVE) and the updated radial position at the mid-

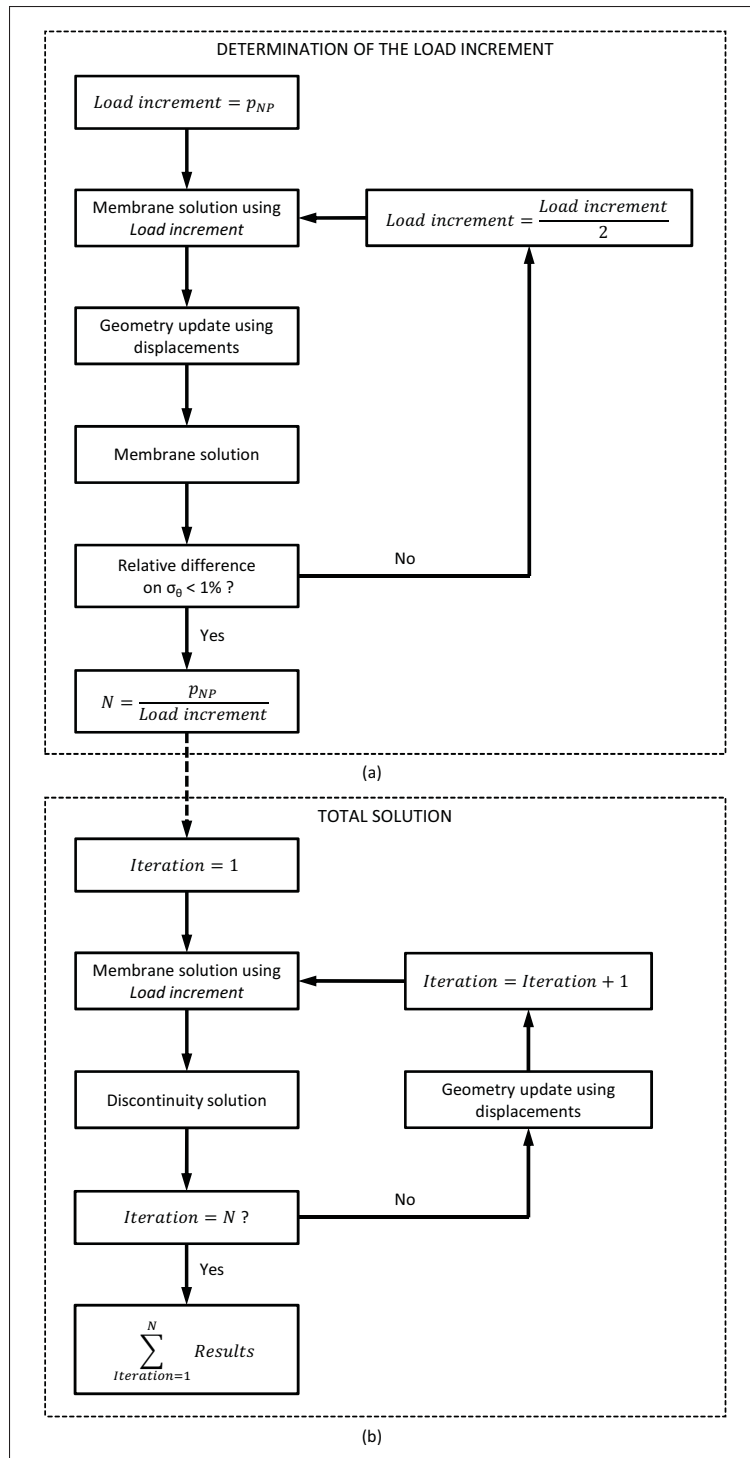


Figure 4.1 Flowchart of (a) Load increment determination methodology (b) Total solution methodology

transverse plane. The other lamellae are offset from the first lamella and pass through their respective fixed Sharpey's fibers anchoring points.

#### 4.2.2.1 Membrane Analysis

The simplified barrel-shaped anulus is represented in Fig. 4.2 (a) and can be seen as a truncated torus. A lamella and an infinitesimal shell element are illustrated in the  $r$ - $\theta$ - $\varphi$  coordinate system, where  $r$  is radial,  $\theta$  is circumferential and  $\varphi$  is longitudinal.

The longitudinal direction is identified by angle  $\varphi$  formed by the axis of revolution  $z$  and the normal to the shell element. The circumferential membrane force  $N_\theta$  and the longitudinal membrane force  $N_\varphi$  are expressed in N/mm. The major radius  $R$  of the truncated torus sets the location for the center of curvature of the longitudinal radius  $r_\varphi$ . The horizontal radius  $r$  is the projection of the circumferential radius  $r_\theta$  over the horizontal plane. The equilibrium planes are equally spaced and are identified with subscript  $i$ , starting with 1 at the UVE and ending at the LVE. The geometry and load symmetry with the mid-transverse plane allows us to limit the analysis to the upper half of the disc. The mid-transverse plane is hereafter referred to as the transverse plane and is numbered the  $m^{th}$  plane. The results at the equilibrium planes are independent of the number of equilibrium planes. Two equilibrium planes (one at the UVE and one at the transverse plane) would be the minimal requirement to solve the set of equations. The results between equilibrium planes are interpolated using Matlab's *piecewise cubic spline interpolation* algorithm, and using five equilibrium planes ensures that interpolated results are consistent. In the following developments, subscript  $j$  identifies the lamella number, starting with 1 at the innermost lamella and ending with  $n$  at the outermost lamella. Static equilibrium along the  $z$  axis is verified for each location  $i$  using the free-body diagram in Fig. 4.2 (b) :

$$r_{s,i,1}^2 p_{NP} - r_{ep}^2 w - 2 \sum_{j=1}^n (N_{\varphi,i,j} r_{i,j} \sin \varphi_{i,j}) = 0 \quad (4.1)$$

where  $r_s$  is the horizontal radius at the inner surface of the lamella and  $w$  is the distributed axial

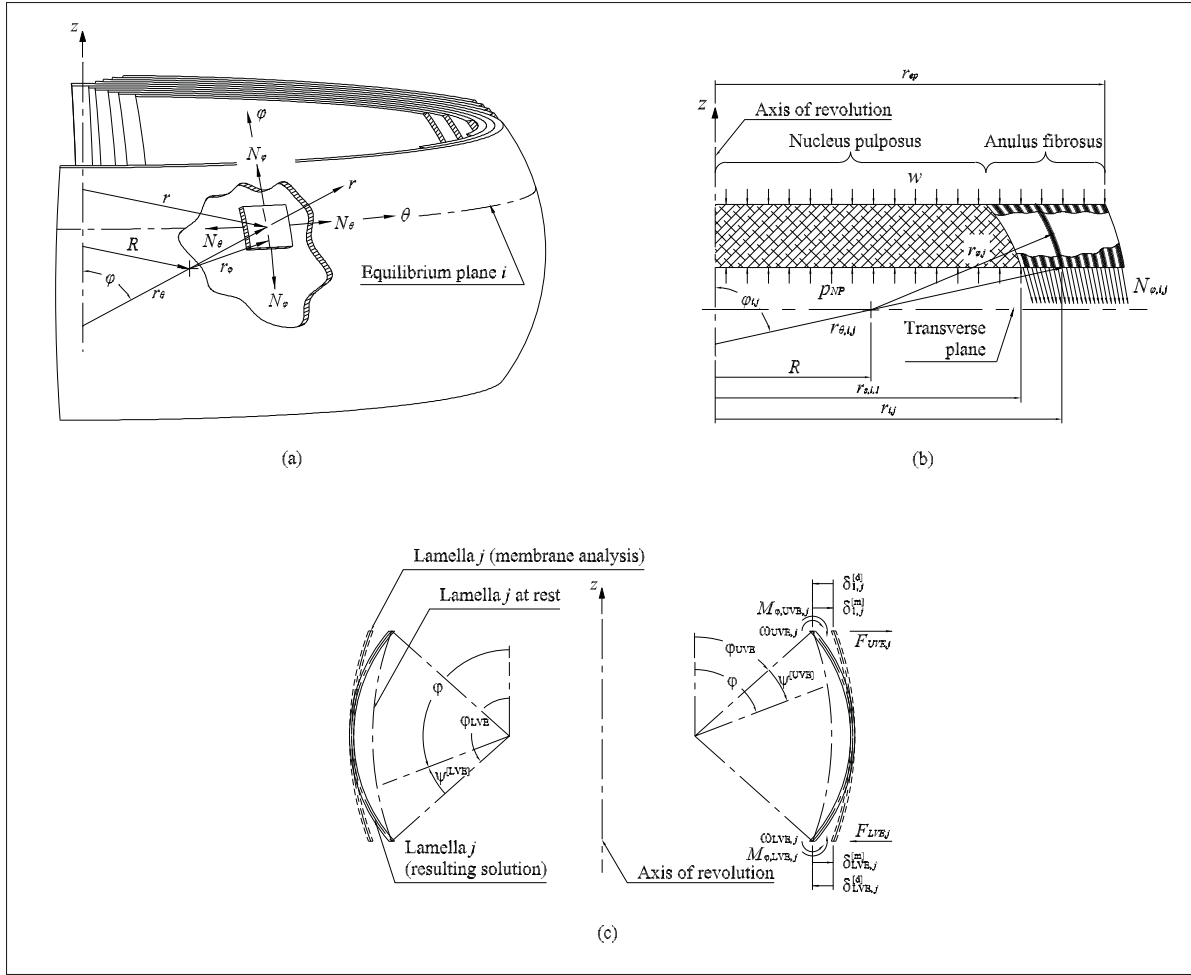


Figure 4.2 (a) Partial geometry of the annulus fibrosus and illustration of an infinitesimal membrane element with its corresponding  $r$ – $\theta$ – $\phi$  coordinate system (b) Free body diagram of the axisymmetric intervertebral disc, shown in the sagittal section view (adapted from Demers *et al.* (2012)) (c) Sagittal cross-section of a lamella showing its boundary conditions

load acting on the vertebral segment. Thin-shell theory allows us to relate  $N_\phi$  to  $N_\theta$  and contact pressure  $p_s$  between adjacent lamellae :

$$\frac{N_{\theta,i,j}}{r_{\theta,i,j}} + \frac{N_{\phi,i,j}}{r_{\phi,i,j}} = (p_{s,i,j} - p_{s,i,j+1}) \quad (4.2)$$

where  $p_{s,i,j}$  is the intradiscal pressure if  $j = 1$  and  $p_{s,i,j+1}$  is the pressure acting outside of the disc if  $j = n$ , which is assumed to be very small. Contact pressures were previously treated as

unknown variables to be resolved using conditions for longitudinal compatibility of displacements (Demers *et al.*, 2013). These conditions are severe constraints when  $\varphi$  is small (Demers *et al.*, 2012), which is the case when considering the effects of the Sharpey's fibers and large deformations. The pressure distribution across the annulus thickness is thus assumed to follow that given by Lamé equation for radial stress in a thick-walled cylindrical pressure vessel :

$$p_s = \frac{\left(1 - \frac{r_{s,\theta,out}^2}{r_{s,\theta}^2}\right) p_{NP} + \left(\frac{r_{s,\theta,out}^2}{r_{s,\theta}^2} - \frac{r_{s,\theta,out}^2}{r_{s,\theta,in}^2}\right) p_{out}}{\frac{r_{s,\theta,out}^2}{r_{s,\theta,in}^2} - 1} \quad (4.3)$$

Subscript  $s$  in Eq. (4.3) indicates that the parameter is evaluated at the surface of the lamella. Subscripts *in* and *out* refer respectively to the inside and outside surfaces of the AF. The compatibility of horizontal displacements using Hooke's law, as suggested in Demers *et al.* (2013), completes the set of equations of the membrane analysis by ensuring that adjacent lamellae neither separate from each other nor interfere with each other :

$$\frac{r_{\theta,i,j}}{Et_j} [N_{\theta,i,j} - \nu N_{\varphi,i,j}] \sin \varphi_{i,j} = \frac{r_{\theta,i,j+1}}{Et_{j+1}} [N_{\theta,i,j+1} - \nu N_{\varphi,i,j+1}] \sin \varphi_{i,j+1} \quad \forall j \in [1, n-1] \quad (4.4)$$

#### 4.2.2.2 Discontinuity Analysis

This analysis is based on the theory of beams on an elastic foundation. The vertebral endplates are treated as rigid flat heads closing both ends of the AF multi-shell structure. Sharpey's fibers produce edge loads on each lamella that depend on the selected boundary conditions. The total displacements at the LVE and UVE are assumed to be zero :

$$\delta_{LVE,j}^{[m]} + \delta_{LVE,j}^{[d]} = \delta_{LVE,j}^{[t]} = 0 \quad (4.5)$$

$$\delta_{UVE,j}^{[m]} + \delta_{UVE,j}^{[d]} = \delta_{UVE,j}^{[t]} = 0 \quad (4.6)$$

where  $\delta$  indicates a horizontal displacement and the superscripts  $[m]$  and  $[d]$  refer respectively to the pressure effect and the discontinuity effect. Calculating the radial displacement due to pressure using Hooke's law and projecting it onto the horizontal plane gives  $\delta^{[m]}$  :

$$\delta_{i,j}^{[m]} = \frac{r_{\theta,i,j} \sin \varphi_{i,j}}{Et_j} \left[ N_{\theta,i,j}^{[m]} - \nu N_{\varphi,i,j}^{[m]} \right] \quad (4.7)$$

The determination of the displacements  $\delta_{LVE,j}^{[d]}$  and  $\delta_{UVE,j}^{[d]}$  caused by the edge loads requires equations for membrane forces  $N_{\varphi,i,j}^{[d]}$  and  $N_{\theta,i,j}^{[d]}$ , bending moments  $M_{\varphi,i,j}^{[d]}$  and  $M_{\theta,i,j}^{[d]}$ , radial displacements  $\delta_{i,j}^{[d]}$  and rotations  $\omega_{i,j}^{[d]}$  (Zingoni, 2001). At the LVE, the following equations apply :

$$N_{\varphi,i,j}^{[d]} = -\cot \left( \varphi_{LVE,j} - \Psi_{i,j}^{[LVE]} \right) C e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta \right) \quad (4.8)$$

$$N_{\theta,i,j}^{[d]} = -\frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\varphi,i,j}} \sqrt{2} \lambda_j C e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.9)$$

$$M_{\varphi,i,j}^{[d]} = \frac{r_{\varphi,i,j}}{\sqrt{2} \lambda_j} C e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta + \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.10)$$

$$M_{\theta,i,j}^{[d]} = \nu M_{\varphi,i,j}^{[d]} \quad (4.11)$$

$$\delta_{i,j}^{[d]} = -\frac{\sqrt{2} \lambda_j}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\varphi,i,j}} \right) \sin \varphi_{i,j} C e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta - \frac{\pi}{4} \right) \quad (4.12)$$

$$\omega_{i,j}^{[d]} = \frac{2 \lambda_j^2}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\varphi,i,j}^2} \right) C e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta \right) \quad (4.13)$$

where  $\Psi_{i,j}^{[LVE]} = \varphi_{LVE,j} - \varphi_{i,j}$ , and  $C$  and  $\beta$  are constants of integration. The slenderness ratio of a lamella  $\lambda$  is given by :

$$\lambda_j^4 = 3(1 - \nu^2) \frac{r_{\varphi,m,j}^4}{r_{\theta,m,j}^2 t_{m,j}^2} \quad (4.14)$$

where  $t$  is the lamella thickness.  $\lambda$  varies with respect to  $\varphi$  but a mean value is deemed acceptable for each lamella. These equations are written according to the loads shown in the free body diagram of Fig. 4.2 (c). Moments and rotations are positive counterclockwise in this study.

Applying an edge moment  $M_{LVE,j}$  on the lower vertebral endplate represents the boundary conditions defined as follows :

$$N_{\varphi,LVE,j}^{[d]} = 0 \quad (4.15)$$

$$M_{\varphi,LVE,j}^{[d]} = M_{LVE,j} \quad (4.16)$$

and yields the following constants :

$$C^{[M_{LVE}]} = \frac{2\lambda_j}{r_{\varphi,i,j}} M_{LVE,j} \quad (4.17)$$

$$\beta^{[M_{LVE}]} = 0 \quad (4.18)$$

Applying an edge force  $F_{LVE,j}$  on the lower vertebral endplate represents the following boundary conditions :

$$N_{\varphi,LVE,j}^{[d]} = -F_{LVE,j} \cos \varphi_{LVE,j} \quad (4.19)$$

$$M_{\varphi,LVE,j}^{[d]} = 0 \quad (4.20)$$

and yields :

$$C^{[F_{LVE}]} = -\sqrt{2}F_{LVE,j} \sin \phi_{LVE,j} \quad (4.21)$$

$$\beta^{[F_{LVE}]} = -\frac{\pi}{4} \quad (4.22)$$

Using Eqs. (4.8) to (4.13) for  $\Psi_{i,j}^{UVE} = \phi_{i,j} - \phi_{UVE,j}$ , that is at the UVE, leads to the following constants :

$$C^{[M_{UVE}]} = \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} \quad (4.23)$$

$$\beta^{[M_{UVE}]} = 0 \quad (4.24)$$

$$C^{[F_{UVE}]} = \sqrt{2}F_{UVE,j} \sin \phi_{UVE,j} \quad (4.25)$$

$$\beta^{[F_{UVE}]} = -\frac{\pi}{4} \quad (4.26)$$

Substituting the corresponding constants in Eqs. (4.8) to (4.13) with these terms gives the general set of equations for the discontinuity analysis.

For a thin cylindrical shell, the edge effect vanishes at a distance

$$l = \pi/\xi \quad (4.27)$$

where

$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{rt_j}} \quad (4.28)$$

For the barrel-shaped geometry,  $r$  is replaced with  $r_\theta$ , which is maximal at the transverse plane on the outermost lamella, with a value of 21.3 mm. The value of  $\xi$  is thus 0.6 mm and  $l = 5.2$  mm. The initial distance of 5.5 mm between the endplates and the transverse plane may



fall below the distance  $l$  with compression of the disc. Despite symmetry with the transverse plane, loads at both endplates are included to account for the combined effect of the LVE and UVE, noting that  $F_{LVE} = -F_{UVE}$  and  $M_{LVE} = M_{UVE}$ . This leads to the following set of equations for the membrane forces, moments, displacements and rotations :

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi,i,j}^{[d]} = & -\cot(\varphi_{LVE,j} - \Psi_{i,j}^{[LVE]}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\varphi,i,j}} M_{LVE,j} \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right. \\
 & \left. - F_{LVE,j} \sin(\varphi_{LVE,j}) \left( \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) - \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right) \right] \\
 & + \cot\left(\varphi_{UVE,j} + \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\varphi,i,j}} M_{UVE,j} \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right. \\
 & \left. + F_{UVE,j} \sin(\varphi_{UVE,j}) \left( \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) - \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right) \right] \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\theta,i,j}^{[d]} = & -2 \left( \frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\varphi,i,j}} \right) \lambda_j e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \left[ \frac{\lambda_j}{r_{\varphi,i,j}} M_{LVE,j} \left( \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right) + F_{LVE,j} \sin(\varphi_{LVE,j}) \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right] \\
 & - 2 \left( \frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\varphi,i,j}} \right) \lambda_j e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \left[ \frac{\lambda_j}{r_{\varphi,i,j}} M_{UVE,j} \left( \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right) - F_{UVE,j} \sin(\varphi_{UVE,j}) \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right] \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi,i,j}^{[d]} = & e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \left[ M_{LVE,j} \left( \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) + \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{r_{\varphi,i,j}}{\lambda_j} F_{LVE,j} \sin(\varphi_{LVE,j}) \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) \right] \\
 & + e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \left[ M_{UVE,j} \left( \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) + \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{r_{\varphi,i,j}}{\lambda_j} F_{UVE,j} \sin(\varphi_{UVE,j}) \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}\right) \right] \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

$$M_{\theta,i,j}^{[d]} = \nu M_{\phi,i,j}^{[d]} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \delta_{i,j}^{[d]} = & -\frac{\sqrt{2}\lambda_j}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\phi,i,j}} \right) \sin \phi_{i,j} \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\ & - \sqrt{2} F_{LVE,j} \sin(\phi_{LVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{2} \right) \\ & + \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{4} \right) \\ & \left. + \sqrt{2} F_{UVE,j} \sin(\phi_{UVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{[d]} = & \frac{2\lambda_{i,j}^2}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\phi,i,j}^2} \right) \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} \right) \right. \\ & - \sqrt{2} F_{LVE,j} \sin(\phi_{LVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{4} \right) \\ & - \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} \right) \\ & \left. - \sqrt{2} F_{UVE,j} \sin(\phi_{UVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.34) \end{aligned}$$

Solving for  $M_{LVE}$ ,  $F_{LVE}$ ,  $M_{UVE}$  and  $F_{UVE}$  requires the use of boundary conditions for displacements and rotations at the junction with the endplates. The boundary conditions for displacements are given in Eqs. (4.5) and (4.6). Two boundary conditions for rotations are considered in separate analyses. The first condition assumes that rotations at the endplates are unconstrained. The second condition is based on the assumption that adjacent lamellae illustrated in Fig. 4.3 (a) cannot rotate without interfering with each other unless radial compression of the matrix is considerable as shown in Fig. 4.3 (b). It is thus assumed that surrounding lamellae offer support at the lamella-endplate interface, as has been suggested previously (Rodrigues *et al.*, 2012). The boundary condition of the innermost lamella would therefore mimic that of a cantilever, as shown in Fig. 4.3 (c). Neglecting any tissue outside of the disc, the outermost lamella could rotate freely at the junction with the endplates so that the corresponding support

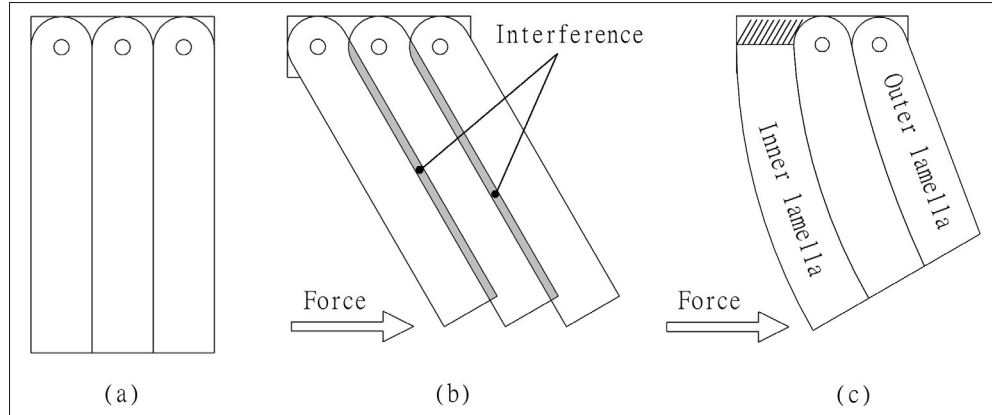


Figure 4.3 Modeling of the edge reactions (a) Sharpey's fibers modeled as pivots on each lamella, unloaded disc (b) Interference created by rotation of the lamellae as bulging occurs (c) Cantilever support at the innermost lamella, pivot support at the outermost lamella and limited rotation of intermediate lamellae as bulging occurs

could be modeled as a pivot. The innermost lamella is thus subjected to an edge force and an edge moment, which are obtained on the assumption that the displacement and rotation are zero, while the outermost lamella is subjected to an edge force obtained on the assumption of zero displacement. It is assumed that the rotations of intermediate lamellae vary linearly between those of the innermost and outermost lamellae. Using Eq. (4.33) with the outermost lamella, numbered as  $n$ , and noting that the edge moments are assumed to be zero for this lamella, the equation for edge displacement at the LVE is :

$$\delta_{LVE,n}^{[d]} = -\frac{\sqrt{2}\lambda_n}{Et_n} \left( \frac{r_{\theta,LVE,n}^2}{r_{\phi,LVE,n}} \right) \sin \phi_{LVE,n} \left[ -\sqrt{2}F_{LVE} \sin(\phi_{LVE,n}) e^{-\lambda_n \Psi_{LVE,n}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_{LVE,n} \Psi_{LVE,n}^{[LVE]} - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{2}F_{UVE} \sin(\phi_{UVE,n}) e^{-\lambda_n \Psi_{LVE,n}^{[UVE]}} \sin \left( \lambda_{LVE,n} \Psi_{LVE,n}^{[UVE]} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.35)$$

Replacing  $\Psi_{LVE}^{[UVE]}$  with  $\phi_{LVE} - \phi_{UVE}$  and  $\Psi_{LVE}^{[LVE]}$  with  $\phi_{LVE} - \phi_{LVE} = 0$ , Eq. (4.35) can be simplified to :

$$\delta_{LVE,n}^{[d]} = -\frac{\sqrt{2}\lambda_n}{Et_n} \left( \frac{r_{\theta,LVE,n}^2}{r_{\phi,LVE,n}} \right) \sin \phi_{LVE,n} \left[ \sqrt{2}F_{LVE,n} \sin(\phi_{LVE,n}) + \sqrt{2}F_{UVE,n} \sin(\phi_{UVE,n}) e^{-\lambda_n(\phi_{LVE,n}-\phi_{UVE,n})} \sin \left( \lambda_n(\phi_{LVE,n}-\phi_{UVE,n}) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.36)$$

Similarly, the displacement for the outermost lamella at the UVE is given by :

$$\delta_{UVE,n}^{[d]} = -\frac{\sqrt{2}\lambda_n}{Et_n} \left( \frac{r_{\theta,UVE,n}^2}{r_{\phi,UVE,n}} \right) \sin \phi_{UVE,n} \left[ -\sqrt{2}F_{LVE,n} \sin(\phi_{LVE,n}) e^{-\lambda_n(\phi_{LVE,n}-\phi_{UVE,n})} \sin \left( \lambda_n(\phi_{LVE,n}-\phi_{UVE,n}) - \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{2}F_{UVE,n} \sin(\phi_{UVE,n}) \right] \quad (4.37)$$

Using Eqs. (4.36) and (4.37) with Eqs. (4.5) and (4.6) allows us to solve for the edge loads  $F_{LVE,n}$  and  $F_{UVE,n}$ . The rotations of the outermost lamella at the LVE and UVE can then be calculated using Eq. (4.34) evaluated at the endplates. The rotations of intermediate lamellae are then linearly interpolated.  $F_{LVE}$ ,  $F_{UVE}$ ,  $M_{LVE}$  and  $M_{UVE}$  are resolved for all lamellae using Eqs. (4.5), (4.6), (4.33) and (4.34) in conjunction with the displacements and rotations at the boundaries. These edge forces are then introduced in Eqs. (4.29) to (4.32) to obtain the stresses and moments anywhere in the lamellae.

Thin-shell theory assumes that stress is constant throughout the thickness of the shell and that the stress due to bending is small for  $r_{\theta}/t > 10$  (Roark *et al.*, 2002). An actual minimum ratio of 83 justifies considering only the stresses given by Eqs. (4.29) and (4.30). The final stresses in the  $r$ - $\theta$ - $\phi$  coordinate system are thus :

$$\sigma_{\phi,i,j}^{[t]} = \frac{N_{\phi,i,j}^{[t]}}{t_j} = \frac{N_{\phi,i,j}^{[m]}}{t_j} + \frac{N_{\phi,i,j}^{[d]}}{t_j} \quad (4.38)$$

$$\sigma_{\theta,i,j}^{[t]} = \frac{N_{\theta,i,j}^{[t]}}{t_j} = \frac{N_{\theta,i,j}^{[m]}}{t_j} + \frac{N_{\theta,i,j}^{[d]}}{t_j} \quad (4.39)$$

### 4.3 Results

The convergence criterion for large deformation was met using 13 pressure increments, as shown in Fig. 4.4. The finite element analysis converged with 80 shell elements per lamella.

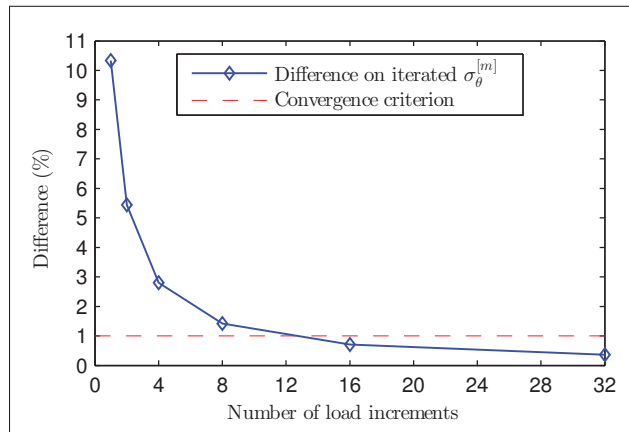


Figure 4.4 Difference between the first solution and the first iteration of the membrane solution as a function of the number of load increments, in the circumferential stress at the transverse plane on the innermost lamella

The radial pressure distribution is crucial in this study since it sets the load transmitted to the lamellae. Figure 4.5 compares the radial pressure distribution of the analytical model with that of the FE model. Both models predicted a non-linear decrease in the AF, but estimations obtained using the Lamé equation were higher by up to 36.6% in the mid-anulus.

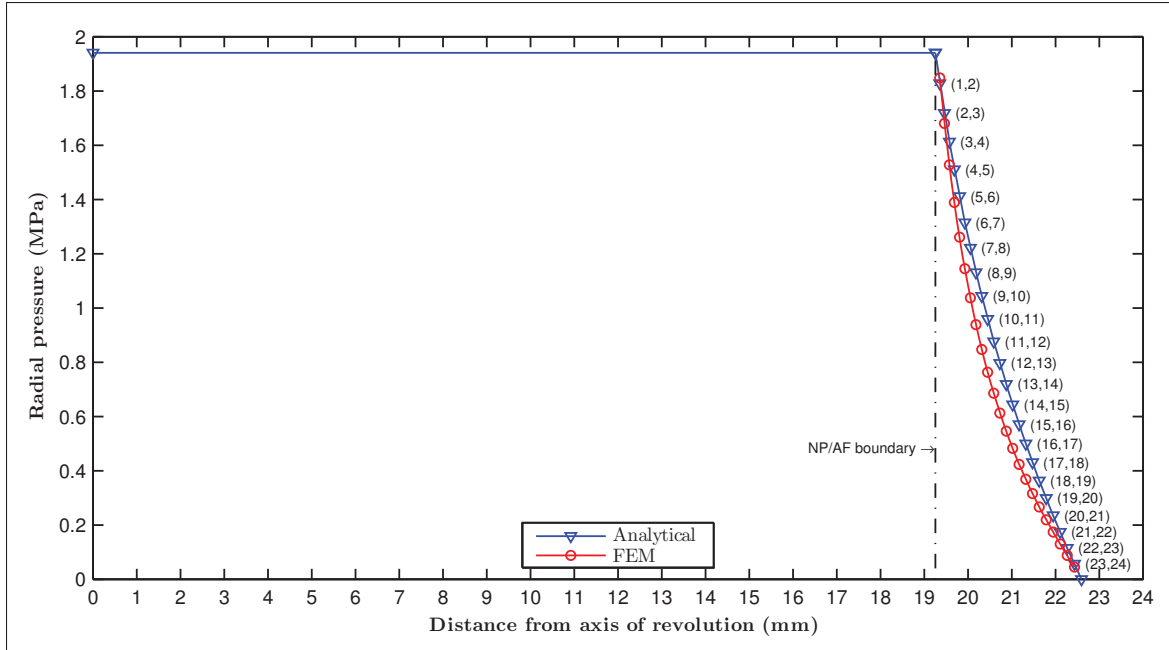


Figure 4.5 Radial pressure in the NP and AF. The numbers in parentheses identify the contacting lamellae. The NP/AF boundary position is based on the displacements at the mid-transverse plane given by the analytical model.

The distributions of longitudinal and circumferential stresses are shown in Fig. 4.6 (a) through (f), as a function of the lamella identification number and the distance from the transverse plane. All models showed radially decreasing stresses except at the last five lamellae, where the FE model predicted higher longitudinal stresses. The stresses were predominantly circumferential, while both types were maximal at the transverse plane. Longitudinal stress decreased away from the transverse plane but increased near the endplates. Circumferential stress decreased to a minimum at the endplates. The two peaks flanking the analytical circumferential stress are due to the attenuation term of Eq. (4.30). This corresponds to the component of circumferential stress due to edge effects with unconstrained rotations on the innermost lamella, as shown in Fig. 4.7. Away from the endplates, the circumferential stress obtained analytically is overestimated compared to the FE model, the largest discrepancy being 62.9% at the transverse plane for unconstrained rotations and 66.5% for constrained rotations.

Figure 4.8 shows the deformed shape of the lamellae in a sagittal section view. The horizontal displacements calculated analytically were again overestimated compared to the value predic-

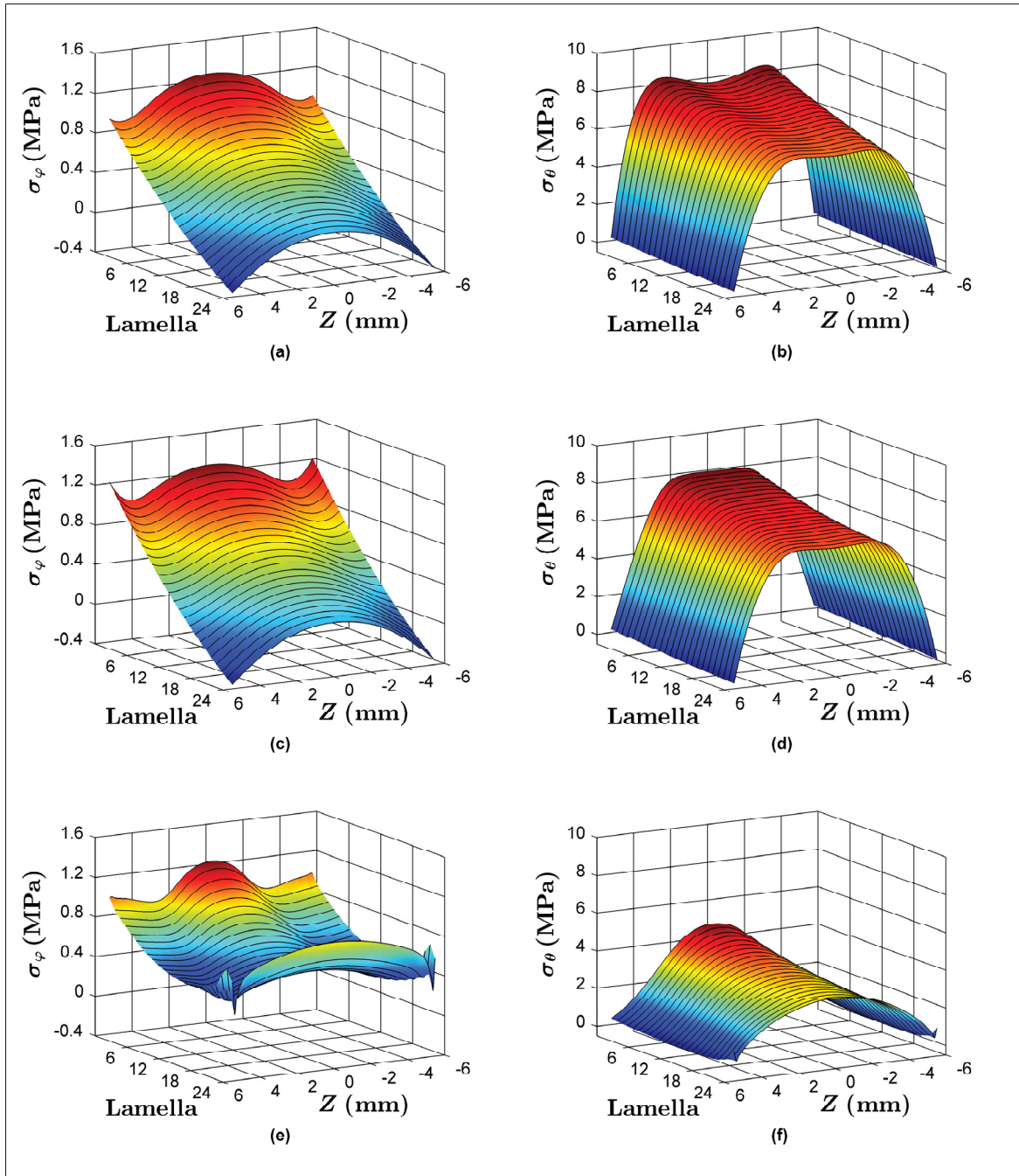


Figure 4.6 Stress distribution across the annulus fibrosus (a) Longitudinal stress, analytical model with unconstrained rotations (b) Circumferential stress, analytical model with unconstrained rotations (c) Longitudinal stress, analytical model with constrained rotations (d) Circumferential stress, analytical model with constrained rotations (e) Longitudinal stress, FE model (f) Circumferential stress, FE model

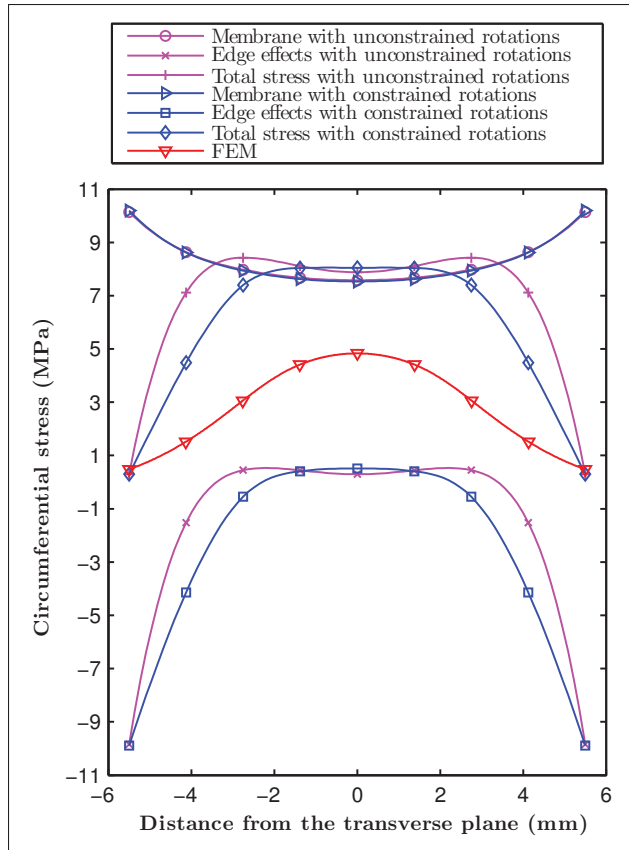


Figure 4.7 Membrane and discontinuity components of circumferential stress, and resultant of circumferential stress in the innermost lamella along the height of the disc

ted by the FE model (2.73 mm versus 1.24). The bulge of the outer AF at the endplates was practically identical for both sets of boundary conditions. In comparison, bulges measured experimentally were 1 mm under a compression load of 2500 N (Wenger et Schlegel, 1997) and 0.48 mm under a compression load of 1000 N (O'Connell *et al.*, 2010). The axial strains were practically identical for both boundary conditions, causing disc height to decrease by 5.5%, compared to 7.8% for the FE model. Disc compressions measured experimentally under a compression load of 1000 N varied from 6.7% to 9.9% (O'Connell *et al.*, 2010). Unlike the analytical model, the FE model predicted that deformed lamellae profiles change gradually from a curve having two inflection points in the inner AF to a curve resembling a circular arch in the outer AF.



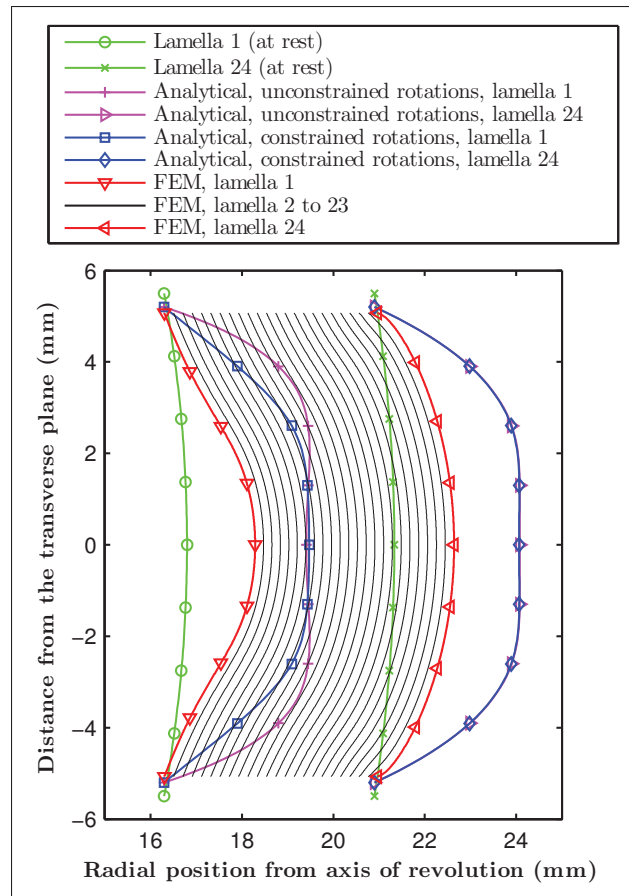


Figure 4.8 Initial and deformed shape of the disc

Finally, Fig. 4.9 compares the angle of rotation at the upper vertebral endplate across the lamellae. In principle, the total rotation predicted by the analytical model (either boundary condition) should agree with the FE curve, and should be a function of edge effects only. Rotations associated with geometry effects are undesired artifacts, which can be revealed by subtracting the rotation caused by edge effects from the total rotation. Geometry effects were comparable under both boundary conditions, but only edge effects with constrained rotations were in agreement with the FE model, indicating that constrained rotation was representative of lamellae behavior near the endplates. In the case of the FE model, the linear interpolation was in good agreement with rotations up the nineteenth lamella, but the built-in support assumption underestimated the rotation at the innermost lamella by approximately  $12^\circ$ .

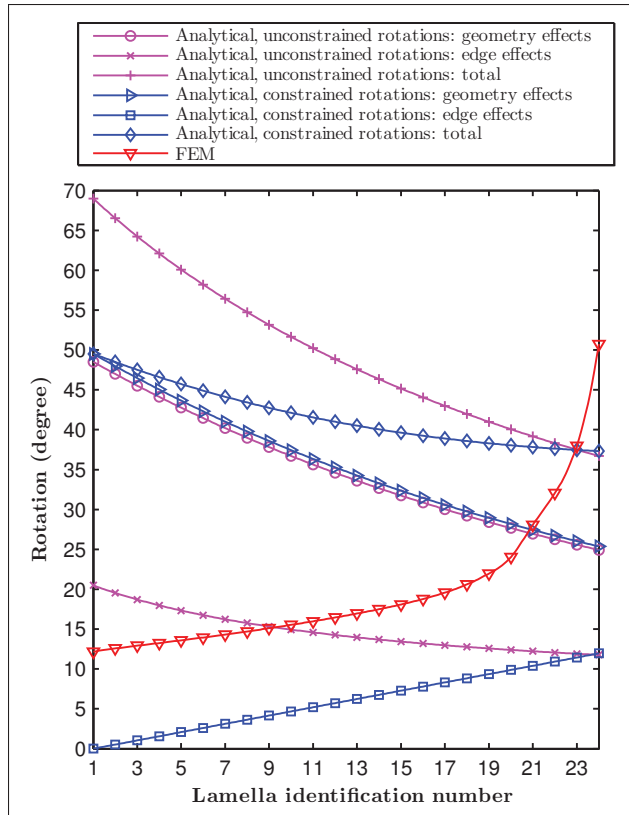


Figure 4.9 Rotations at the upper vertebral endplate

#### 4.4 Discussion

In contrast with experimental results (Adams *et al.*, 1996), the contact pressure shown in Fig. 4.5 starts to drop at the NP boundary because the swelling pressure inside the AF was not included in the model. Similar results for the anterior site have been obtained previously using the FE method and neglecting swelling beyond the NP (Marini et Ferguson, 2014; Noailly *et al.*, 2011). In the absence of published experimental measurements of radial pressure inside the AF, we presumed this pressure to be similar to that in the axial and circumferential directions.

In Fig. 4.6, the stresses were shown to be maximal on the transverse plane in the innermost lamella and to decrease towards the outermost lamella. It must be emphasized that the material properties were assumed to be isotropic and constant throughout the annulus thickness. The

stress due to compressive loading is expected to be lower in the inner annulus (Noailly *et al.*, 2011). Refinement of the analytical model is necessary to support that behavior.

The predicted transverse plane bulges at the outermost lamella were 2.7 mm for the analytical model and 1.2 mm for the FE model, while experimental measurements of disc bulge range from 0.31 to 0.61 mm for a compressive load of 1000 N (O'Connell *et al.*, 2010). Assuming a linear correlation between axial load and disc bulge (not yet verified experimentally), the FE model should predict a bulge about 25% greater. However, the disc cross-sectional area in this study was 33% less than measured mean values (O'Connell *et al.*, 2010), and swelling pressure in the AF was ignored. This could explain the larger disc bulge predicted by the FE model, but would not explain the value predicted by the analytical model. If axial displacement is examined, both models appear to be too stiff. More realistic material properties should be used to test the ability of the analytical model to predict changes in disc height. The limitations of the models are discussed below.

The FE model suggested that the rotation at the junction with the endplates increases from the innermost to the outermost lamellae, as shown in Fig. 4.9. Such behavior is consistent with the model proposed by Rodrigues *et al.* (2012). The analytical model responded poorly to the imposition of edge rotation, due to the circular arches assumed before each load increment. If the lamellae profiles could account fully for imposed edge rotations, the geometry could evolve to complex profiles as shown in the FE model curves of Fig. 4.8, and the geometry effects shown in Fig. 4.9 would vanish. Furthermore, the FE model predicted a rotation of  $12.2^\circ$  on the innermost lamella at the junction with the endplates, as shown in Fig. 4.9, whereas the analytical model assumes a cantilever type support. The analytical model could therefore be improved by considering less severe rotation constraints at the IVD-endplate interface. It is also observable in Fig. 4.9 that the FE model rotations of lamellae 20 to 24 increased abruptly. In reality, these outer lamellae make a  $90^\circ$  bend to insert into the periphery of the vertebrae. We suggest that the purpose of this structural characteristic is to prevent excessive rotation in the peripheral lamellae at the endplates. However, it must be recalled that tissues surrounding the IVD were ignored. The rotations may be lower when considering these tissues.

The constrained displacements at the endplates, combined with the contact elements at the lamellae interfaces as used in the FE model, correspond to the annulus fibrosus behavior near the endplates as described elsewhere (Rodrigues *et al.*, 2012). Constraining the rotations in the analytical model is an artificial means of mimicking this behavior. By solving for the membrane and discontinuity equations consecutively (a common practice when applying these theories), we showed clearly in the present study that constraining the rotations improves the prediction of the response. However, the results should be improved, and we suggest that the geometrical function defining the lamellae be made fully compatible with the boundary conditions, for example by using a fourth-order polynomial. Indeed, the principal limitation of this study is the use of circular arches to define the sagittal curvature of the lamellae. This first approximation meets the requirements of membrane theory, which implies continuous geometry without sharp changes in curvature. However, fourth-order polynomials do not meet these requirements and complicate the method. Our results nevertheless show the potential of the beam-on-elastic-foundation theory as a tool that takes large deformations of a bulging multi-shell annulus into consideration in studies of the effects of Sharpey's fibers on lamellar stresses.

The analytical model uses static equilibrium to simulate the effect of compression on an axisymmetric disc. Occupational injuries to discs can be caused by excessive quasi-static loads, but also by repetitive movements under smaller loads. Cumulative damage was not examined in this study, but should be in future studies. The cause of disc herniation is not likely pure compression, but rather flexion, torsion and combined loads (Gunzburg *et al.*, 1992; Roaf, 1960; Nachemson, 1981). The model should thus be adapted to include loading scenarios such as flexion and torsion combined with compression, and to represent the kidney-bean-like shape of the lumbar discs. Including hyperelastic and heterogeneous anisotropic material properties also would improve it. Swelling pressure inside the AF should be modeled, since it may affect the contact pressure at the lamellar interfaces and undoubtedly plays a role in sustaining axial load. However, including all possible features in the model at once could confound the results and compromise the interpretation. We therefore suggest stepwise development and validation of analytical models of IVD under stress.

## 4.5 Conclusion

An analytical method may be used to calculate stresses and strains in a simplified multi-shell model of an intervertebral disc subjected to compression, based on thin-shell theory. The effects of Sharpey's fibers may be taken into account by applying beam-on-elastic-foundation theory and setting specific boundary conditions. By updating the geometry as a function of small increments in load, large deformations of the soft lamellae may be taken into account. The stress responses thus obtained under two different sets of boundary conditions were compared to those obtained using a simplified finite element model. Circumferential stress predominates over longitudinal stress and is maximal in the innermost lamella, at the mid-transverse plane. Sharpey's fibers were shown to decrease circumferential stress near the endplates and to cause complex sagittal curvature of the lamellae. Imposing constraints on rotation at the IVD-endplate interface improves the performance of the analytical model. However, updating the lamellar profiles using circular arches appears to be a major limitation of this model. The mathematical function used to define the lamellar geometry should be made more representative of the complex sagittal curvature that occurs in association with large deformations of the soft tissues composing the annulus fibrosus.

The analytical method has been given little attention in investigations of IVD mechanics and degeneration. However, realistic analytical models would offer means of methodological triangulation and therefore would be helpful for validation of experimental and finite element studies. Due to the complexity of intervertebral discs, the development of analytical models thereof should proceed stepwise. Despite the use of many simplifications and assumptions, our model includes characteristics of the annulus fibrosus not studied previously using the analytical approach and suggests new possibilities for analytical modeling of the intervertebral discs.

## Acknowledgements

The authors thank the Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FRQNT), the Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC), the Fonds de recherche du

Québec – Santé (FRSQ) and the Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST) for funding this study.

### Nomenclature

$\beta$	Constant of integration
$\delta$	Horizontal displacement (mm)
$\lambda$	Slenderness ratio of a lamella
$\nu$	Poisson's ratio of anulus fibrosus
$\omega$	Rotation (rad)
$\varphi$	Angular coordinate describing the angle between the axis of revolution and the normal to the lamella at a specified point ( $^{\circ}$ )
$\Psi$	Angular position relative to the endplate
$\sigma$	Membrane stress (MPa)
$\xi$	Constant of a lamella
$C$	Constant of integration
$E$	Young's modulus of anulus fibrosus (MPa)
$F_{LVE}$	Edge force at lower vertebral endplate (N/mm)
$F_{UVE}$	Edge force at upper vertebral endplate (N/mm)
$l$	Attenuation discontinuity length (mm)
$H$	Height of intervertebral disc (mm)
$m$	Total number of equilibrium planes on the upper half of the disc, including the transverse plane
$M$	Membrane moment (N·mm/mm)
$M_{LVE}$	Edge moment at lower vertebral endplate (N·mm/mm)
$M_{UVE}$	Edge moment at upper vertebral endplate (N·mm/mm)
$n$	Total number of lamellae
$N$	Membrane force (N/mm)
$p_{NP}$	Intradiscal pressure (MPa)

$p_s$	Contact pressure between two adjacent lamellae (MPa)
$r_\varphi$	Longitudinal radius (mm)
$r_\theta$	Circumferential radius (mm)
$r_{ep}$	Endplate radius (mm)
$r$	Horizontal radius (mm)
$r_s$	Horizontal radius on the inside surface of a lamella (mm)
$R$	Center of curvature of longitudinal radius $r_\varphi$ (mm)
$t$	Lamella thickness (mm)
$w$	Distributed axial load (MPa)
$z$	Axis of revolution

### Subscripts

$\varphi$	Longitudinal direction
$\theta$	Circumferential direction
$i$	Equilibrium plane identification number ( $1 \leq i \leq m$ )
$in$	Inside surface of the annulus fibrosus
$j$	Lamella identification number ( $1 \leq j \leq n$ )
$LVE$	Lower vertebral endplate
$out$	Outside surface of the annulus fibrosus
$r$	Radial direction
$UVE$	Upper vertebral endplate

### Superscripts

$[d]$	Discontinuity solution
$[LVE]$	At the lower vertebral endplate
$[m]$	Membrane solution

$[t]$  Total solution

$[UVE]$  At the upper vertebral endplate



## CHAPITRE 5

### ARTICLE 3 : ANALYTICAL EVALUATION OF STRESSES AND DISPLACEMENTS OF AN INTERVERTEBRAL DISC

Sébastien Demers<sup>1</sup>, Sylvie Nadeau<sup>1</sup>, Abdel-Hakim Bouzid<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure,

1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, Québec, Canada H3C 1K3

Article soumis à la revue « Journal of Applied Mechanics » en octobre 2015.

Manuscript JAM-15-1583

#### Résumé

Cet article fait suite à une recommandation du deuxième article, suggérant d'améliorer la représentation du profil sagittal des lamelles. Le modèle se base sur la théorie des membranes et la théorie des poutres sur fondation élastique afin de simuler la réponse d'un disque intervertébral soumis à une charge de compression uniaxiale. Le disque intervertébral est modélisé par une géométrie axisymétrique ayant, dans une première version du modèle, une courbure sagittale circulaire et, dans une deuxième version du modèle, une courbure sagittale parabolique. En comparaison avec un arc de cercle, la parabole permet un angle d'insertion moins prononcé dans les plateaux vertébraux, tout en admettant une variation graduelle de la géométrie nécessaire à la théorie des membranes. Il est donc attendu que la parabole puisse mieux représenter l'effet de la courbure complexe des lamelles causée par les grandes variations géométriques.

Les contraintes issues des modèles analytiques sont comparées à celles d'une analyse par éléments finis. Les résultats montrent que le choix du profil influence la distribution des contraintes dans l'anneau fibreux et qu'un profil parabolique est avantageux pour représenter l'interaction des lamelles près des plateaux vertébraux. Ce profil présente cependant certaines limitations dans la représentation du renflement à travers l'épaisseur de l'anneau fibreux. La méthode devrait être étudiée dans le but d'améliorer la déformation obtenue, et d'inclure l'anisotropie et l'hyperélasticité du matériau des lamelles.

## Abstract

Understanding the intervertebral disc response to mechanical loads is important to prevent back injuries. The experimental and the finite element methods are widely used for that purpose but methodological triangulation is deficient due to lack of a complementary method. This study aims at choosing theories and assumptions that could be used to develop an analytical model for stress analysis of intervertebral discs. Thin-shell and beam-on-elastic-foundation theories are used in conjunction with an iterative method to account for large deformation of the disc. The model simulates an axial compression acting on a simplified axisymmetric disc composed of a multi-shell linear and isotropic structure surrounding a pressurized cavity. The highly deformable lamellae are idealized by either circular or parabolic arches in the sagittal plane, and their effect on stress and strain response are compared. The circumferential and longitudinal stresses are compared to those of a simplified finite element model. The comparison shows that the analytical approach is promising and allows to identify improvements for future studies. The use of a parabolic profile is advantageous and allows to account for the interactive support of the lamellae near the endplates. The method should be adapted to improve bulge deformation obtained across the AF thickness, and the model should include material anisotropy and hyperelasticity.

## 5.1 Introduction

Intervertebral discs (IVD) are cartilaginous articulations that allow mobility of the spine and absorb energy transmitted to the spine. Healthy IVDs are composed of a highly hydrated nucleus pulposus (NP) and an annulus fibrosus (AF), itself composed of 15 to 25 concentric lamellae (Marchand et Ahmed, 1990). The lamellae are thin composite structures of approximately 0.2 mm made of unidirectional collagen fibers embedded in a collagen matrix. The lamellae are anchored into the vertebral endplates by collagen and elastic fibers called Sharpey's fibers (Johnson *et al.*, 1982), which insert into the cartilage endplates. The loads transmitted through

the spine cause an increase of the intradiscal pressure, and this pressure transfers load on the AF, whose lamellae act essentially in tension (Noailly *et al.*, 2011), like in a composite pressure vessel. In typical work activities, important loads may be applied in compression, flexion, torsion, and in combinations. Pure compression is often used to develop biomechanical models, because of its simplicity, but flexion and torsion combined to compression are of major practical interest for studying disc degeneration.

In spite of increased occupational health and safety awareness and improved ergonomic solutions, back injuries, and especially disc herniation, are persisting problems in the workplace. The experimental and finite element (FE) methods are extensively used to study tissue properties and to understand the mechanical response of the IVD subjected to various loads. The FE method is outstanding for studying various scenarios of finely detailed discs and to obtain results that can't be measured experimentally in the IVD, such as stresses and internal strain components. Due to the complexity of IVDs' structure, material properties and loadings, the analytical method has been practically abandoned. It is generally advised to compare model results obtained using three different approaches, but biomechanical models are left with only two approaches, refraining methodological triangulation. Nevertheless, inter-individual and intra-individual variations, technical concerns with in-vivo instrumentation, ethical considerations with living subjects and cadaveric specimens, delicate specimen preparation and preservation, complex material behavior and complex structural interactions are just to name a few of the challenges that complicate model validation. In view of these difficulties, triangulation should be employed whenever possible to verify the logical and biological plausibility of biomechanical models' results. Analytical modeling may appear restrictive to simulate biomechanical tissues, but is yet promising for modeling IVDs, particularly using thin-shell theory (Demers *et al.*, 2013). A sophisticated, yet convenient, analytical model would be useful to complement and support the results of experimental and finite element models of IVDs.

Among the few published analytical studies, there are those based on the theory of thick-walled cylinders (Hickey et Hukins, 1980; Hukins, 1992; Prud'Homme, 2008), the thin-shell theory (Demers *et al.*, 2013; McNally et Arridge, 1995), the theory of laminated plates (Iatri-

dis et al (Gwynn, 2004) and force equilibrium in a series of fiber sheets (Ngwa et al, 2011). Including the lamellae curvature in the sagittal plane is necessary to consider disc bulge. Thin-shell theory has the advantage of simulating geometries with sagittal curvatures in a simple manner. Large deformation inherent to soft tissues and the multi-lamellae annulus fibrosus have been modeled analytically (Demers *et al.*, 2013), but the lamellae anchorage to the endplates were ignored. It is expected that the interactions of adjacent lamellae near the endplates greatly affect the sagittal lamellae curvatures during axial loading. Lamellae deformation has been described to account for the supportive effect of surrounding lamellae near the endplates (Rodrigues *et al.*, 2012). This effect appears to be similar to that caused by edge loads acting at the end closure of a pressure vessel. In pressure vessels, edge loads are generally treated using the beam-on-elastic-foundation theory (Zingoni, 2001).

In this study, the beam-on-elastic-foundation theory is used to simulate the lamellae anchorage to the endplates by applying edge loads on each lamella. Two geometrical functions are used to describe the sagittal curvature of the lamellae, and their resulting stresses and displacements are compared to that of a FE model of a simplified IVD. The first geometrical function defines the lamellae as circular arches while the second defines them using a parabolic curve. The curvature of these profiles varies smoothly and the lamellae are thin in comparison to the radii of curvature, which satisfy the conditions required by the thin-shell theory (Zingoni, 1995). It is expected that the parabolic function will be more responsive to the edge loads because its curvature is less pronounced at the endplates than at the mid-transverse plane and should offer a better representation of the true deformed shape of the inner AF (Demers *et al.*, 2012).

## 5.2 Methods

The analytical model is developed using Matlab R2012b (MATLAB, 2012) and consists of two combined analyses : a membrane analysis, which considers only surface loads, and a discontinuity analysis, which accounts for the edge loads caused by the Sharpey's fibers and lamellae interactions near the endplates. Figure 5.1 (a) shows a lamella with typical parameters of a thin shell of revolution, and an infinitesimal shell element with the membrane forces acting on it.

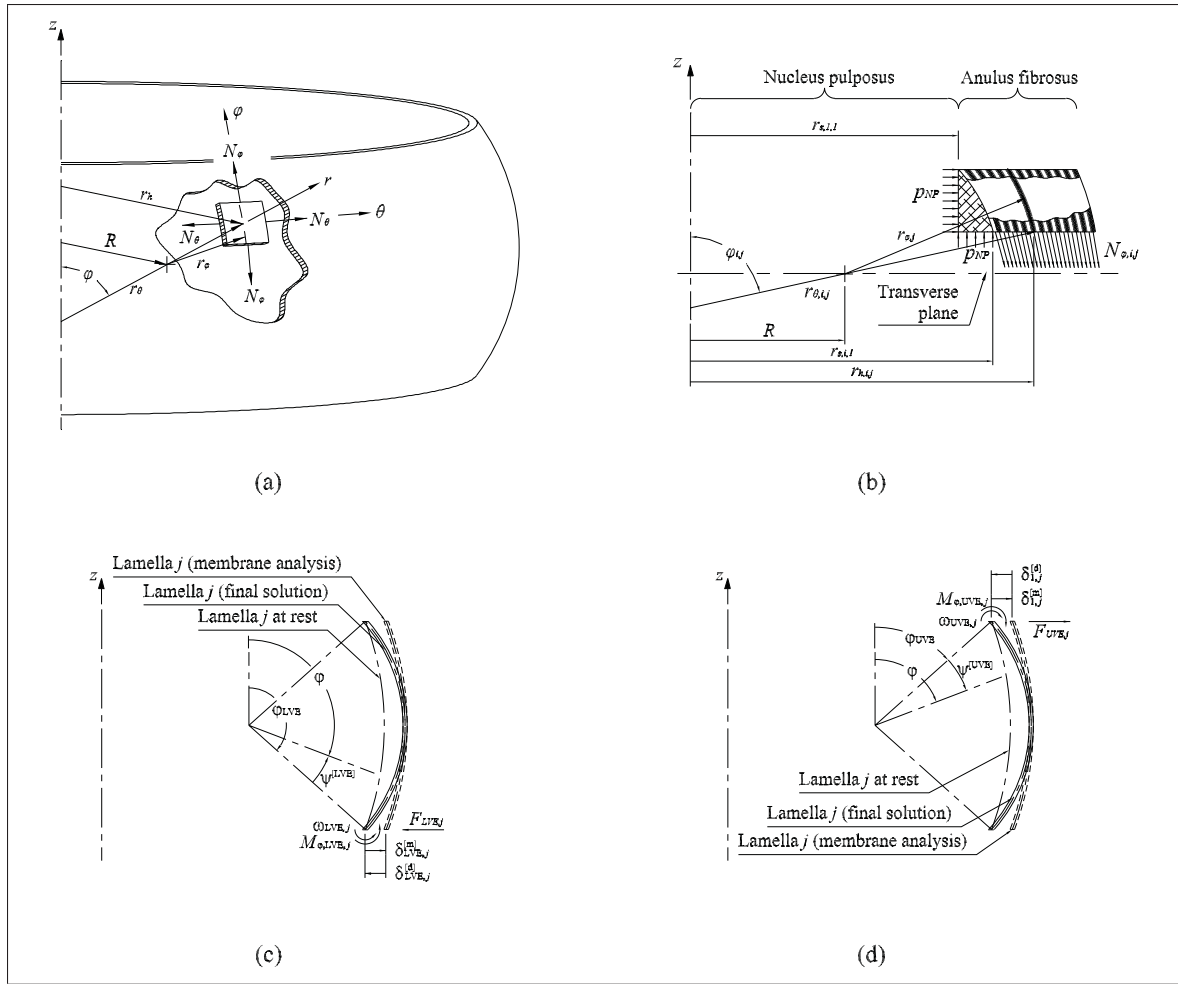


Figure 5.1 (a) Geometry of a lamella of the AF and illustration of an infinitesimal membrane element with its corresponding  $r$ – $\theta$ – $\phi$  coordinate system (b) Free body diagram of the axisymmetric IVD, shown in the sagittal section view (c) Sagittal cross-section of a lamella showing its boundary conditions at the lower vertebral endplate (d) Sagittal cross-section of a lamella showing its boundary conditions at the upper vertebral endplate

The stress analysis is conducted in the  $r$ – $\theta$ – $\phi$  coordinate system, where  $r$  is radial,  $\theta$  is circumferential and  $\phi$  is longitudinal.  $N_\theta$  and  $N_\phi$  are the circumferential and longitudinal membrane forces, respectively, and are expressed in N/mm. The radius  $r$  requires the determination of the center of curvature  $R$ , the circumferential radius  $r_\theta$ , the longitudinal radius  $r_\phi$ , the horizontal distance  $r_h$  from the axis of revolution  $z$  to the element, and the angular position  $\phi$ , defined as the angle between the axis  $z$  and the normal vector of the shell element. To analyze the AF

across its height and thickness, a discretization is made and the shell elements are identified with subscripts  $i$  and  $j$ . Subscript  $i$  defines the position along the  $z$  axis, starting at the upper vertebral endplate (UVE) and ending at the lower vertebral endplate (LVE). Due to symmetry with the mid-transverse plane, only the upper half of the disc is analyzed. It is divided into 14 equal segments. Therefore, the solution is evaluated at 15 equilibrium planes. This gives a satisfactory representation of results distribution along the height of the disc, although the results are independent of the number of equilibrium planes. Subscript  $j$  identifies the lamellae, starting with the innermost lamella and ending with the outermost lamella.

The analytical method is executed in loops to consider large deformations using small load increments and an adaptive geometry, as illustrated in Fig. 5.2. Each loop uses the load increment that is sufficiently small to meet the criterion for 1% stress difference limit with the previously tested load increment. This criterion is applied to the circumferential stress at the mid-transverse plane.

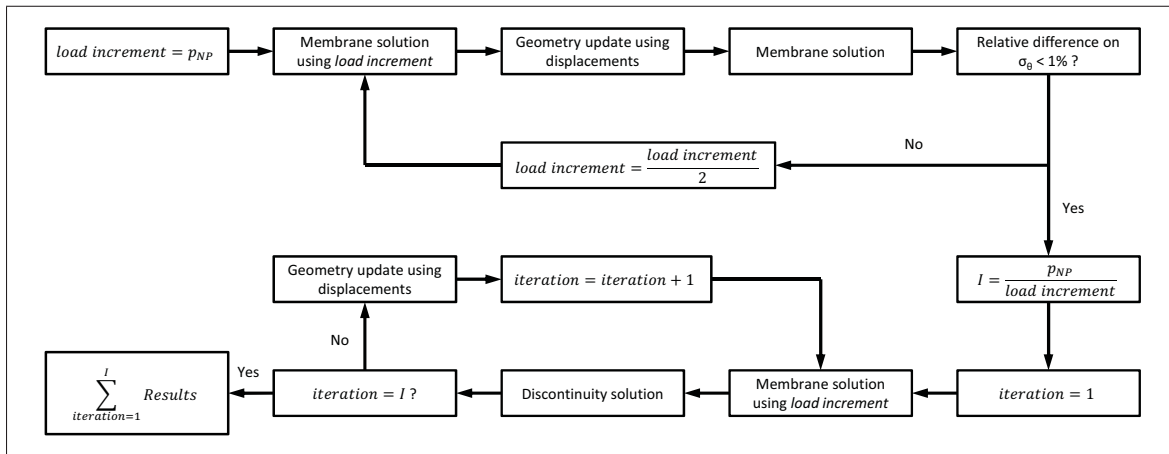


Figure 5.2 Flowchart of solution methodology

The number of required iterations  $I$  for the final solution is obtained by dividing the total intradiscal pressure by the load increment. The first use of the load increment gives a partial solution. The geometry, defined with circular or parabolic functions, is updated based on the calculated displacements at the end of the load step. The load increment is then reapplied to the

updated geometry. This process is repeated until the final solution is obtained. This accounts for large deformations by adapting the geometry as the intradiscal pressure increases.

In addition to large deformations, the model includes the multi-lamellae structure of the AF and the effects of the Sharpey's fibers. To simplify the model, vertebral processes and surrounding muscles and ligaments are not considered. The AF material is considered linear and isotropic, having a Young's modulus  $E$  of 50.3 MPa, obtained by calculating a mean value from experimental data (Holzapfel *et al.*, 2005). Poisson's ratio  $\nu$  is assumed to be 0.45, based on the assumption that the AF matrix is nearly incompressible, given its hydrophilic nature. The endplates are assumed parallel, flat and perfectly rigid. The rigid endplate assumption should not affect the stresses by more than 4% (Little *et al.*, 2007). An elliptical transverse cross-section has been suggested for the AF of lumbar discs (Eijkelkamp, 2002). It is simplified in this study by an axisymmetric geometry. The annulus fibrosus is modeled with  $n = 24$  concentric lamellae having a constant thickness of 0.2 mm, based on histological studies (Marchand et Ahmed, 1990; Cassidy *et al.*, 1989). At the endplates, the outside disc radius is 21 mm and the NP radius  $r_{NP}$  is 16.2 mm (Demers *et al.*, 2013). Initial disc height  $H$  is 11 mm (Zhou *et al.*, 2000; O'Connell *et al.*, 2010). The bulge at rest is not available in the literature. Therefore, a value of 0.5 mm is deemed reasonable. A hydrostatic pressure  $p_{NP}$  of 1.94 MPa is applied on the inner surface of the AF to represent the response of a lumbar disc to the application of an axial compression load of 2000 N (Adams *et al.*, 1996). The swelling pressure inside the AF is neglected for simplification.

### 5.2.1 Sagittal profiles

In the analytical model, the innermost lamella is defined using three points : the fixed location at the UVE, the displaced radial position at the mid-transverse plane and the fixed location at the LVE. The remaining lamellae are offset from the innermost lamella, and pass through their respective fixed Sharpey's fibers locations. The modeling of the parabolic profiles is detailed in annex VI. The ratios  $r_\theta/t$  and  $r_\phi/t$  are greater than 10 anywhere in the AF, which justifies the use of the thin-shell theory.

### 5.2.2 Membrane analysis

According to the free-body diagram of Fig. 5.1 (b), static equilibrium of the shell elements located at the plane  $i$  is described by :

$$(r_{s,i,1}^2 - r_{s,1,1}^2) p_{NP} - 2 \sum_{j=1}^n (N_{\varphi,i,j} r_{i,j} \sin \varphi_{i,j}) = 0 \quad (5.1)$$

where  $r_{s,i,1}$  is the horizontal radius reaching the inside surface of the innermost lamella at the equilibrium plane. In thin-shell theory, the longitudinal stress is related to the circumferential stress and the contact pressures  $p_s$  acting inside and outside each lamella, such that :

$$\frac{N_{\theta,i,j}}{r_{\theta,i,j}} + \frac{N_{\varphi,i,j}}{r_{\varphi,i,j}} = (p_{s,i,j} - p_{s,i,j+1}) \quad (5.2)$$

In Eq. (5.2),  $p_{s,i,j}$  corresponds to the intradiscal pressure  $p_{NP}$  when  $j = 1$ . When  $j = n$ ,  $p_{s,i,j+1}$  corresponds to the pressure acting on the outside surface of the AF, that is  $p_{out}$ , and is assumed to be very small. Stress profilometry allows to measure the pressure distribution in the NP and in the AF, using a pressure transducer, but the pressure was only measured in the vertical and circumferential directions (Adams *et al.*, 1996; McNally et Adams, 1992; Skrzypiec *et al.*, 2007). A radial pressure distribution in the AF is thus suggested in this study based on the radial stress for thick cylinders (Lamé, 1866) :

$$p_{s,i,j} = \frac{\left(1 - \frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,j}^2}\right) p_{NP} + \left(\frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,j}^2} - \frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,in}^2}\right) p_{out}}{\frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,in}^2} - 1} \quad (5.3)$$

where  $r_{s,\theta,i,j}$  is the profile's radius along  $\theta$  at the inner surface of the lamella  $j$ , on plane  $i$ .  $r_{s,\theta,i,in}$  and  $r_{s,\theta,i,out}$  are evaluated inside and outside the AF, respectively. Acceptability of Eq. (5.3) to represent the pressure distribution across the AF thickness should be verified when experimental data is available. However, it will certainly differ from reality depending on creep.



Equations (5.1), (5.2) and (5.3) lead to an indeterminate problem requiring additional equations, which are obtained by considering the compatibility of horizontal displacements of adjacent lamellae. On a given equilibrium plane, the horizontal displacements of any two adjacent lamellae are forced to be equal to ensure that the lamellae stay in contact during deformation. The radial compression of the lamellae is ignored. Using Hooke's law with this assumption gives :

$$\frac{r_{\theta,i,j}}{Et_j} [N_{\theta,i,j} - \nu N_{\varphi,i,j}] \sin \varphi_{i,j} = \frac{r_{\theta,i,j+1}}{Et_{j+1}} [N_{\theta,i,j+1} - \nu N_{\varphi,i,j+1}] \sin \varphi_{i,j+1} \quad (5.4)$$

Equations (5.1) to (5.4) allow to solve for the membrane forces and displacements due to pressure.

### 5.2.3 Edge effects

The discontinuity analysis uses the theory of beam on elastic foundation to simulate the edge effects using edge loads acting on each lamella at the LVE and the UVE. These edge loads include the annular forces  $F_{LVE,j}$  and  $F_{UVE,j}$ , and the annular moments  $M_{LVE,j}$  and  $M_{UVE,j}$ . They are applied to the lamellae's deformed shape obtained by pressure, as shown in Figs. 5.1 (c) and (d), to cancel the total displacements and to limit the rotations at the LVE and the UVE. They yield the longitudinal and circumferential discontinuity stresses  $N_{\varphi,i,j}^{[d]}$  and  $N_{\theta,i,j}^{[d]}$ , and the displacements  $\delta_{i,j}^{[d]}$  and rotations  $\omega_{i,j}^{[d]}$  caused by these discontinuity stresses. The general equations and the detailed approach are presented in annex VII. The necessity to consider mutual interaction of the relatively close endplates is explained in annex VIII. The membrane forces,

displacements and rotations due to edge loads are given by :

$$\begin{aligned}
N_{\phi,i,j}^{[d]} = & -\cot(\phi_{LVE,j} - \Psi_{i,j}^{[LVE]}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) \right. \\
& \left. - F_{LVE,j} \sin(\phi_{LVE,j}) \left( \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) - \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) \right) \right] \\
& + \cot(\phi_{UVE,j} + \Psi_{i,j}^{[UVE]}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) \right. \\
& \left. + F_{UVE,j} \sin(\phi_{UVE,j}) \left( \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) - \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) \right) \right] \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\theta,i,j}^{[d]} = & -2 \left( \frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\phi,i,j}} \right) \lambda_j e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \left[ \frac{\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} \left( \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) - \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) \right) \right. \\
& \left. + F_{LVE,j} \sin \phi_{LVE,j} \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) \right] - 2 \left( \frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\phi,i,j}} \right) \lambda_j e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \\
& \left[ \frac{\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} \left( \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) - \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) \right) \right. \\
& \left. - F_{UVE,j} \sin \phi_{UVE,j} \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) \right] \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{i,j}^{[d]} = & -\frac{\sqrt{2}\lambda_j}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\phi,i,j}} \right) \sin \phi_{i,j} \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
& - \sqrt{2} F_{LVE,j} \sin(\phi_{LVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \\
& \left. \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} F_{UVE,j} \sin(\phi_{UVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{i,j}^{[d]} = \frac{2\lambda_{i,j}^2}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\phi,i,j}^2} \right) & \left[ \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} \right) \right. \\
& - \sqrt{2} F_{LVE,j} \sin(\phi_{LVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{UVE,j} e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \\
& \left. \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} \right) - \sqrt{2} F_{UVE,j} \sin(\phi_{UVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \cos \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Solving for  $M_{LVE,j}$ ,  $F_{LVE,j}$ ,  $M_{UVE,j}$  and  $F_{UVE,j}$  requires boundary conditions for displacements and rotations at the endplates. The final displacements  $\delta^{[f]}$  are evaluated using the following equations :

$$\delta_{LVE,j}^{[m]} + \delta_{LVE,j}^{[d]} = \delta_{LVE,j}^{[f]} = 0 \quad (5.9)$$

$$\delta_{UVE,j}^{[m]} + \delta_{UVE,j}^{[d]} = \delta_{UVE,j}^{[f]} = 0 \quad (5.10)$$

where  $\delta^{[m]}$  is the displacement produced by pressure and  $\delta^{[d]}$  is the displacement produced by the edge forces and moments. Note that the superscripts  $[m]$ ,  $[d]$  and  $[f]$  are used in the remaining developments to distinguish between the pressure effect, the discontinuity solution and the final results, respectively. The normal displacement due to pressure is calculated using Hooke's law and projected onto the horizontal plane to obtain  $\delta^{[m]}$  :

$$\delta_{i,j}^{[m]} = \frac{r_{\theta,i,j} \sin \phi_{i,j}}{Et_j} \left[ N_{\theta,i,j}^{[m]} - \nu N_{\phi,i,j}^{[m]} \right] \quad (5.11)$$

Based on a descriptive model (Rodrigues *et al.*, 2012), the rotation of the inner lamellae at the endplates should be less than the rotation of the outer lamellae. However, the amount of rotation that is allowed by the supporting lamellae is unknown. If the connective tissues are neglected, it can be assumed that the outermost lamella can rotate freely about the Sharpey's fibers. It is also assumed that the supporting action on the innermost lamella prevents any rotation about the Sharpey's fibers. The rotations of intermediate lamellae are linearly interpolated between the rotation of the innermost lamella and that of the outermost lamella. Edge forces and edge moments are thus applied on the boundaries of the lamellae, and the edge moments vanish toward the outermost lamella. Neglecting edge moments and replacing  $\Psi_{LVE}^{[UVE]}$  with

$\varphi_{LVE} - \varphi_{UVE}$  and  $\Psi_{LVE}^{[LVE]}$  with  $\varphi_{LVE} - \varphi_{LVE} = 0$  allow to rewrite Eq. (5.7) to reflect the edge displacements at the LVE of the outermost lamella :

$$\begin{aligned} \delta_{LVE,n}^{[d]} = & -\frac{\sqrt{2}\lambda_n}{Et_n} \left( \frac{r_{\theta,LVE,n}^2}{r_{\varphi,LVE,n}} \right) \sin \varphi_{LVE,n} \left[ \sqrt{2}F_{LVE,n} \sin(\varphi_{LVE,n}) \right. \\ & \left. + \sqrt{2}F_{UVE,n} \sin(\varphi_{UVE,n}) e^{-\lambda_n(\varphi_{LVE,n}-\varphi_{UVE,n})} \sin \left( \lambda_n(\varphi_{LVE,n} - \varphi_{UVE,n}) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Similarly, the edge displacement of the outermost lamella at the UVE is given by :

$$\begin{aligned} \delta_{UVE,n}^{[d]} = & -\frac{\sqrt{2}\lambda_n}{Et_n} \left( \frac{r_{\theta,UVE,n}^2}{r_{\varphi,UVE,n}} \right) \sin \varphi_{UVE,n} \left[ -\sqrt{2}F_{LVE,n} \sin(\varphi_{LVE,n}) e^{-\lambda_n(\varphi_{LVE,n}-\varphi_{UVE,n})} \right. \\ & \left. \sin \left( \lambda_n(\varphi_{LVE,n} - \varphi_{UVE,n}) - \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{2}F_{UVE,n} \sin(\varphi_{UVE,n}) \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Edge loads  $F_{LVE,n}$  and  $F_{UVE,n}$  are then obtained by substituting Eqs. (5.11), (5.12) and (5.13) into (5.9) and (5.10). The rotations of the outermost lamella at the LVE and UVE can be calculated using Eq. (5.8), and the rotations of intermediate lamellae are calculated using linear interpolation. The displacements and rotations at both endplates are introduced into Eqs. (5.7) and (5.8) to solve for  $F_{LVE,j}$ ,  $F_{UVE,j}$ ,  $M_{LVE,j}$  and  $M_{UVE,j}$  for each lamella. These edge loads can then be introduced into Eqs. (5.5) and (5.6) to calculate the discontinuity stresses throughout the AF.

#### 5.2.4 Combined effects

Neglecting the bending stresses in thin shells, the final stresses in the  $r$ - $\theta$ - $\varphi$  coordinate system are :

$$\sigma_{\phi,i,j}^{[f]} = \frac{N_{\phi,i,j}^{[f]}}{t_j} = \frac{N_{\phi,i,j}^{[m]}}{t_j} + \frac{N_{\phi,i,j}^{[d]}}{t_j} \quad (5.14)$$

$$\sigma_{\theta,i,j}^{[f]} = \frac{N_{\theta,i,j}^{[f]}}{t_j} = \frac{N_{\theta,i,j}^{[m]}}{t_j} + \frac{N_{\theta,i,j}^{[d]}}{t_j} \quad (5.15)$$

### 5.2.5 Finite element model

The FE model is prepared using the finite element software ANSYS 14.0 (ANSYS, 2011). The lamellae are modeled using axisymmetric shell elements SHELL209 with flexural stiffness activated. It is thought that a certain amount of relative slip is present between the lamellae (Gregory *et al.*, 2012). Translamellar cross bridges may play a role in sharing shear loads and preventing delamination (Gregory *et al.*, 2012; Schollum *et al.*, 2009; Smith et Elliott, 2011), but no quantitative data is available yet in the literature. Contact elements CONTA172 and target elements TARGE169 are thus used to simulate the lamellae interactions with the appropriate options set to prevent layer separation and allow sliding without friction. The NP pressure is modeled as a surface load acting inside the innermost lamella. The degrees of freedom (DOF) of the nodes at the LVE are coupled vertically to simulate the rigid endplate. They are also restrained horizontally to simulate the lamellae anchored into the endplates. The same conditions are applied to the nodes at the UVE. The nodes at the mid-transverse plane are restrained vertically to avoid singularity.

## 5.3 Results

The FE analysis converged with 80 elements per lamella. One thirteenth of the total intradiscal pressure is used as the load increment in the analytical model.

The pressure distribution given by Eq. (5.3) is nearly constant with respect to axis  $z$ , as shown in Fig. 5.3 (a), and varies slightly nonlinearly with respect to the lamellae positions. It is similar to the one obtained with the FE model, except near the endplates, as shown in Fig. 5.3 (b), where the contact pressure rises due to the supportive effect of adjacent lamellae.

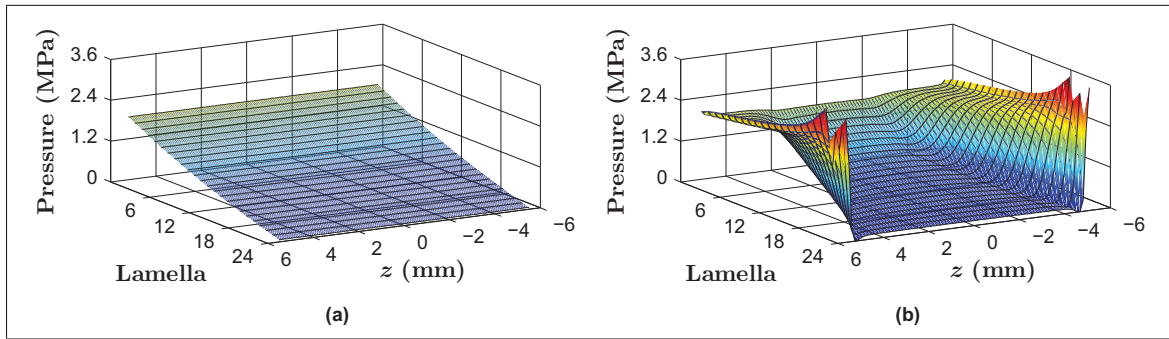


Figure 5.3 Contact pressure distribution in the AF, as a function of the lamella number and the position along the  $z$  axis (a) Estimated in the analytical model (b) Obtained with the FE model

Figures 5.4 (a) through (f) show the longitudinal and circumferential stress distributions in the AF obtained with the three models. It can be seen that the circumferential stress is predominant over the longitudinal stress near the mid-transverse plane. All models indicate that the longitudinal stress is greater at the innermost lamella, with a value of approximately 1.2 MPa. It decreases when moving away from the mid-transverse plane then increases near the endplates. The FE model predicts increasing longitudinal stress on the outer portion of the AF, as shown in Fig. 5.4 (e), which is not depicted by the analytical models.

In general, according to Fig. 5.4 (b), (d) and (f), the circumferential stress is maximum at the mid-transverse plane and decreases towards the endplates to a very small value. At the innermost lamella, the parabolic function overestimates the circumferential stress at the mid-transverse plane by 25% compared to the FE results, while the circular profile overestimates it by 67%. In Fig. 5.4 (b), the stress vanishes at a rapid rate near the endplates, even in the inner lamellae where the edge moment is at its maximum value. When using parabolic profiles,

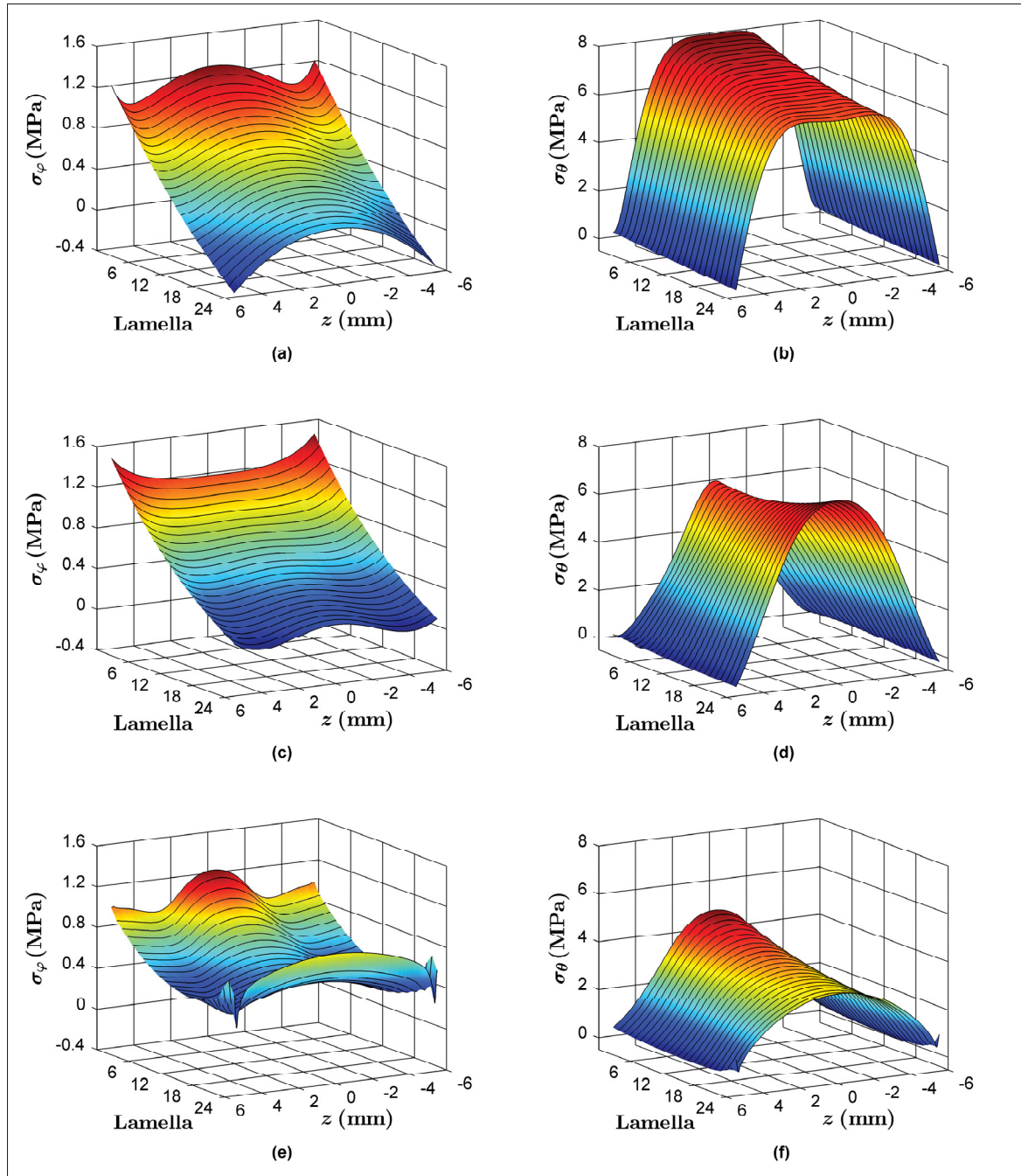


Figure 5.4 Stress distribution across disc's height and lamellae (a) Longitudinal stress, analytical model with circular profiles (b) Circumferential stress, analytical model with circular profiles (c) Longitudinal stress, analytical model with parabolic profiles (d) Circumferential stress, analytical model with parabolic profiles (e) Longitudinal stress, FE model (f) Circumferential stress, FE model

the stresses in the inner lamellae are substantially attenuated near the endplates, as shown in Fig. 5.4 (d). A similar stress attenuation near the endplates is observed in Fig. 5.4 (f) for the FE model. In spite of these similarities, the model using parabolic profiles predicts higher circumferential stresses towards the outside of the AF, at the mid-transverse plane, as shown in Fig. 5.4 (d). This is not depicted by the FE model or the analytical model when using circular profiles.

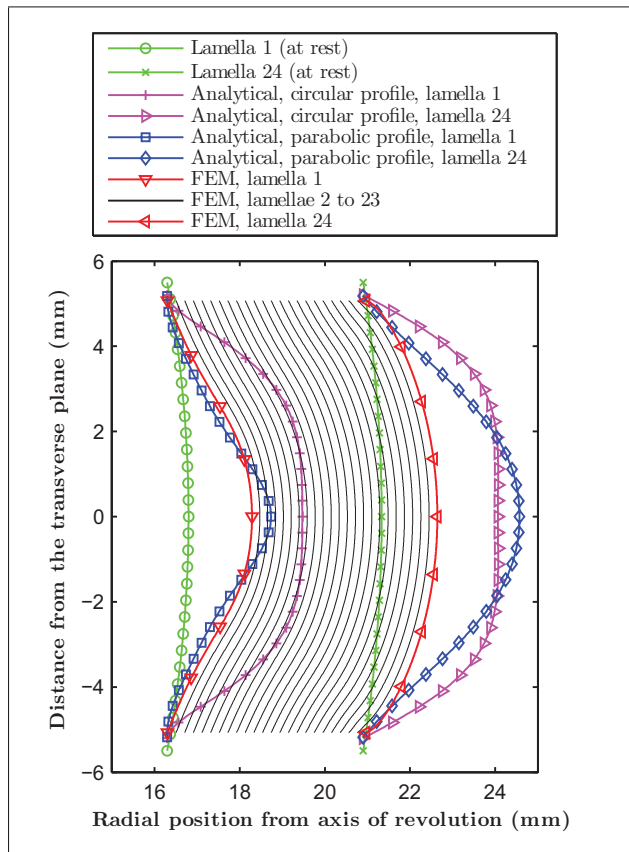


Figure 5.5 Initial and deformed shape of the disc

The deformed shape of the AF is presented in Fig. 5.5. The presence of two symmetrically arranged inflexion points, easily observable on the deformed shape of the innermost lamella in particular, is a consequence of the edge moments applied to the analytical model, and agrees with the deformed shape of the FE model. The inflexion point is the location where the Gaus-



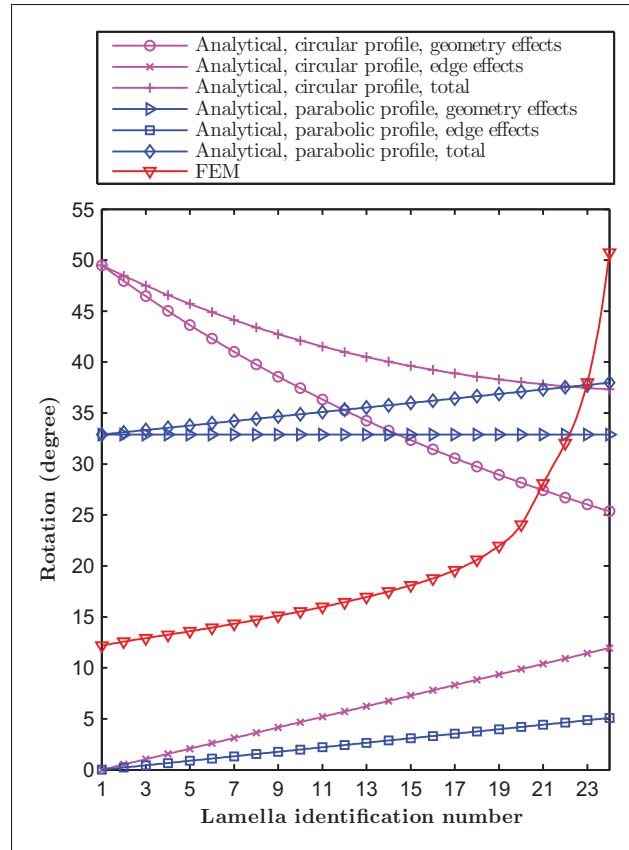


Figure 5.6 Rotations at the upper vertebral endplate

sian curvature near the mid-transverse plane changes sign (Calladine, 1985). Although using parabolic profiles improves the results for the inner AF, the bulge on the outermost lamella differs by 156%. This discrepancy is the cause of overestimated stresses in the outer lamellae, as noted in Fig. 5.4 (d), and is discussed in section 5.4.

Figure 5.6 dissociates the edge effects from the geometry effects in the calculation of the total rotations at the endplates, noting that geometry effects are artifacts of the simplified mathematical expressions used to represent the updated geometry at the beginning of each iteration. In fact, neither the circular or parabolic functions admit a constraint on the slope at the endplates. The imposed rotations are represented in Fig. 5.6 by the curves referred to by *edge effects*, and are used in the determination of the edge loads. The total rotations include the imposed rotations but also the rotations inherent to the geometrical function used. The rotations due to the

geometry effects at the innermost lamella are reduced by 34% when using a parabolic profile rather than a circular profile. The FE model predicts a roughly linear increase of the rotation up to the 19<sup>th</sup> lamella. The behavior of the five most external lamellae may be due to the absence of external tissues. It is important to note that external lamellae attach to the vertebrae at an angle of 90° (Nosikova *et al.*, 2012), so the modeling of these lamellae should be given particular considerations.

## 5.4 Discussion

Stress profilometry indicated that fluid behavior of the NP extended beyond the NP–AF interface (Adams *et al.*, 1996). If one assumes that the radial pressure inside the AF is equal to the vertical and circumferential pressures, which has not been demonstrated yet in the literature, the contact pressures predicted by this study should be corrected so that the pressure starts dropping somewhere passed the NP–AF interface, to account for swelling pressure in the AF. The estimated radial pressure distribution is based on Lamé equation for thick-walled pressure vessels, which was shown in Fig. 5.3 to be consistent with the load transferred by the contact elements of the FE model, except near the endplates. The contact pressure increases in these regions, possibly because of the concentrated efforts necessary to conform the lamellae geometry. The localized rise of contact pressure was not included in the analytical model and its implication on the stress and strain behavior should be investigated in future works.

The similarities between the results of the analytical and FE models indicate that thin-shell and beam-on-elastic-foundation theories can adequately describe the anchoring of the lamellae of the AF into the endplates through Sharpey's fibers. The method provides a mean to model the supportive effect of the adjacent lamellae with the use of edge forces and edge moments at the endplates. The deformed shape of the innermost lamella, using a parabolic profile, is in good agreement with that of the FE model, despite the geometry artifact explained previously. This is explained by the fact that geometry effects are compensated by the hypothesis of totally restrained rotation at the innermost lamella, which underestimates the rotations in comparison to the FE model. As revealed in Fig. 5.6, the rotation of the innermost lamella, as predicted by

the FE model, is approximately  $12^\circ$ , while the analytical model assumed a totally constrained rotational degree of freedom at the innermost lamella, which seems too severe. To the authors' knowledge, the model suggested by Rodrigues *et al.* (2012) was the only attempt, prior to this study, to explain the lamellae behavior at the endplates, and no data is currently available to quantify the rotations at the boundaries. As evidenced by this stress analysis, the lamellae's end conditions have an important effect on stress and strain behavior of the AF. Although it is simple to model using shell and contact elements in FE models, the analytical simulation requires thorough understanding of this behavior.

Figure 5.5 gives a visual appreciation of disc bulge. At the innermost lamella, the bulge is 2.67 mm when using circular profiles and 1.93 mm when using parabolic profiles. At the outermost lamella, bulge is 2.72 mm when using circular profiles and 3.17 mm when using parabolic profiles. In comparison, bulge predicted by the FE model is 1.48 mm at the innermost lamella and 1.24 mm at the outermost lamella. The difference between internal and external bulge in the FE model is due to the radial compression of the lamellae, which is not considered in the analytical model. The displacement of the outermost lamella is 64% greater than that of the innermost lamella, when using the parabolic profiles. It is hypothesized that the slenderness ratio  $\lambda$  has a great influence on bulge discrepancy, as it is generally applied to long shallow vessels made of a stiff material. The method could be adapted to let  $\lambda$  be a variable that ensures compatibility of the final displacements, thus avoiding the outer lamellae to unrealistically displace more than the inner lamellae. It could also serve as a variable to match the experimental bulge at the mid-transverse plane. Such technique would be phenomenological, like the constitutive materials that are calibrated in FE models until they behave as expected. The main disadvantage of doing this is that bulge could not be used as a validation criterion, but rather as a calibration parameter. Bulge measured experimentally has been found to be, on average, 0.41 mm for the inner AF and 0.48 mm for the outer AF under a load of 1000 N in compression (O'Connell *et al.*, 2010). If we were to apply twice that load and assuming a linear bulge increase, the bulge predicted by the FE model would still be overestimated by up to 50%, and the discrepancies with the analytical model would be even higher. Adjusting  $\lambda$ , as explained previously,

could match the analytical results with FE ones. The difference that remains with literature results could be explained by anthropometric differences, and by some simplifications of the models. In fact, the disc's cross-sectional area is 33% smaller than the mean experimental value (O'Connell *et al.*, 2010). The swelling pressure in the AF was ignored, which results in underestimating the load bearing capacity of the disc. Bulge should decrease if swelling was included. Also, the material was considered linear, isotropic, and heterogeneous throughout the AF. Its effect on the results should be investigated by including more realistic properties in the models.

To comply with the end conditions and to model  $r_\phi$  appropriately, the geometrical function defining the lamellae must account for a rotational degree of freedom at their ends and must be able to include inflexion points as is indicated in Fig. 5.5 at the inner AF of the FE results. A fourth order polynomial could account for the rotational constraints at the endplates, and could include positive and negative Gaussian curvatures. However, the inflexion points of such profile imply abrupt changes of curvature, which violates the membrane hypothesis (Zingoni, 1995) and requires local discontinuities to be considered.

## 5.5 Conclusion

This study presented an analytical model of a simplified intervertebral disc, based on thin-shell theory, and compared the displacement and stress results with that of a simplified finite element model. The model is axisymmetric and includes the multi-lamellae structure of the annulus fibrosus. The lamellae anchorage into the endplates, and the supportive effects of the surrounding lamellae, were simulated using edge loads. These edge loads were considered using the theory of beam on elastic foundation adapted to shells of revolution. The effect of using two different mathematical functions to describe the sagittal lamellae profiles were compared : a circular curve and a parabolic curve. The parabolic profiles are more responsive to the applied boundary conditions and demonstrated the ability of the analytical method to simulate the edge loads. However, the discontinuity solution largely overestimated the stresses and displacements at the outer lamellae and should be adapted to ensure the compatibility of displacements.

The analytical model used simplifications that were necessary to verify the suitability of the theories to model an IVD, and allowed to understand their behavior depending on which of two curvatures were used to define the lamellae. A potentially interesting improvement to the analytical model would be to define the sagittal lamellae profiles using a fourth-order polynomial to include negative Gaussian curvature observed in the inner lamellae of the finite element results. Applicability of thin-shell theory to negative Gaussian curvature must first be studied thoroughly. Important improvements are required for the analytical model to gain practical interest, such as including a realistic cross-sectional geometry, hyperelastic and anisotropic material properties, heterogeneous material properties through the AF thickness, and complex loadings such as flexion and torsion.

Understanding model behavior under simplified conditions is a preliminary requirement. Major improvements can be foreseen using the principles of composite material mechanics to include anisotropy, and using the iterative method, used for large deformation, to adapt material properties as a function of strain. Considering these possibilities, this approach may offer a way to allow methodological triangulation for studying intervertebral disc mechanics.

### **Acknowledgements**

The authors thank the Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FRQNT), the Fonds de Recherche du Québec – Société et culture (FRQSC), the Fonds de recherche du Québec – Santé (FRQS) and the Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST) for funding this study.

### **Conflict of interest**

The authors declare that they have no conflict of interest.

### **Nomenclature**

$\beta$             Constant of integration

$\delta$	Horizontal displacement (mm)
$\lambda$	Slenderness ratio of a lamella
$\nu$	Poisson's ratio of annulus fibrosus
$\omega$	Rotation (rad)
$\varphi$	Angular coordinate describing the angle between the axis of revolution and the normal to the lamella at a specified point ( $^{\circ}$ )
$\Psi$	Angular position relative to the endplate ( $^{\circ}$ )
$\sigma$	Membrane stress (MPa)
$\xi$	Constant of a lamella
$b$	Disc bulge (mm)
$C$	Constant of integration
$E$	Young's modulus of annulus fibrosus (MPa)
$F_{LVE}$	Edge force at lower vertebral endplate (N/mm)
$F_{UVE}$	Edge force at upper vertebral endplate (N/mm)
$l$	Attenuation discontinuity length (mm)
$H$	Height of intervertebral disc (mm)
$I$	Number of iterations to account for large deformation
$M$	Membrane moment (N·mm/mm)
$M_{LVE}$	Edge moment at lower vertebral endplate (N·mm/mm)
$M_{UVE}$	Edge moment at upper vertebral endplate (N·mm/mm)
$n$	Total number of lamellae
$N$	Membrane force (N/mm)
$p_{NP}$	Intradiscal pressure (MPa)
$p_{out}$	Pressure acting on the outside surface of the annulus fibrosus (MPa)
$p_s$	Contact pressure between two adjacent lamellae (MPa)
$r_{\varphi}$	Longitudinal radius (mm)
$r_{\theta}$	Circumferential radius (mm)

$r_h$	Horizontal radius (mm)
$r_{NP}$	Radius of the nucleus pulposus at the endplates (mm)
$r_s$	Horizontal radius on the inside surface of a lamella (mm)
$r_{s,\theta}$	Lamella radius along $\theta$ at its inner surface (mm)
$R$	Center of curvature of longitudinal radius $r_\varphi$ (mm)
$t$	Lamella thickness (mm)
$z$	Axis of revolution

### Subscripts

$\varphi$	Longitudinal direction
$\theta$	Circumferential direction
$i$	Equilibrium plane identification number ( $1 \leq i \leq m$ )
$j$	Lamella identification number ( $1 \leq j \leq n$ )
$LVE$	Lower vertebral endplate
$r$	Radial direction
$UVE$	Upper vertebral endplate

### Superscripts

$[d]$	Discontinuity solution
$[LVE]$	At the lower vertebral endplate
$[m]$	Membrane solution
$[f]$	Final solution
$[UVE]$	At the upper vertebral endplate





## **CHAPITRE 6**

### **ARTICLE 4 : ANISOTROPIC MULTI-SHELL ANALYTICAL MODELING OF AN INTERVERTEBRAL DISC SUBJECTED TO AXIAL COMPRESSION**

Sébastien Demers<sup>1</sup>, Sylvie Nadeau<sup>1</sup>, Abdel-Hakim Bouzid<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure,

1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, Québec, Canada H3C 1K3

Révision soumise le 30 octobre 2015 à la revue « ASME Journal of Biomechanical Engineering ».

Manuscript BIO-15-1241

#### **Résumé**

Cette étude présente une méthode analytique basée sur les deux premiers articles de revue, et incluant l'anisotropie des lamelles de l'anneau fibreux. La théorie des membranes, la théorie des poutres sur fondation élastique et la théorie des matériaux composites sont utilisées conjointement pour simuler l'effet d'une compression uniaxiale sur un disque intervertébral axisymétrique, en tenant compte de l'effet des fibres de Sharpey et des grandes variations géométriques. Les propriétés des matériaux sont dérivées de résultats expérimentaux documentés issus d'essais de traction biaxiale. Les résultats sont comparés à un modèle d'analyse par éléments finis axisymétrique utilisant des éléments de contact à l'interface des lamelles.

Les résultats démontrent que les théories utilisées permettent d'estimer les contraintes en tout point de l'anneau fibreux, avec une bonne correspondance avec les éléments finis. Le modèle montre le rôle de l'anisotropie dans la réduction des contraintes. Le comportement en cisaillement du modèle correspond aux observations expérimentales. Des améliorations sont suggérées afin d'arriver au développement d'un modèle suffisamment élaboré pour permettre la triangulation de résultats d'études expérimentales et numériques.

## Abstract

Studies on intervertebral disc response to various loads and postures are essential to understand disc's mechanical functions and to suggest preventive and corrective actions in the workplace. The experimental and finite element approaches are well-suited for these studies, but validating their findings is difficult, partly due to the lack of alternative methods. Analytical modeling could allow methodological triangulation and help validation of finite element models. This paper presents an analytical method based on thin-shell, beam-on-elastic-foundation and composite materials theories to evaluate the stresses in the annulus fibrosus of an axisymmetric disc composed of multiple thin lamellae. Large deformations of the soft tissues are accounted for using an iterative method and the anisotropic material properties are derived from a published biaxial experiment. The results are compared to those obtained by finite element modeling. The results demonstrate the capability of the analytical model to evaluate the stresses at any location of the simplified annulus fibrosus. It also demonstrates that anisotropy reduces stresses in the lamellae. This novel model is a preliminary step in developing analytical models of intervertebral discs, and this paper suggests important features that may be included to improve model realism.

## 6.1 Introduction

Intervertebral discs (IVD) are cartilaginous joints composed of the nucleus pulposus (NP), the annulus fibrosus (AF) surrounding the NP, and the cartilage endplates joining the AF to the upper and lower vertebrae. They absorb and restore energy during daily activities and are subjected to compressive, tensile, flexural, torsional and shear loadings (Guerin et Elliott, 2007). The NP of a healthy disc is composed of highly hydrated collagen gel, and behaves hydrostatically (Nachemson, 1960). The AF is a very organized structure made of concentric lamellae, which are composed of unidirectional collagen fibers embedded in a proteoglycan matrix. The fibers orientation alternates between consecutive lamellae. The fibers angle, measured from a plane normal to the spinal axis, increases linearly from  $28^\circ$  to  $43^\circ$  with the radial distance from the NP, at the postero-lateral location (Cassidy *et al.*, 1989). In the circumferential direction, the

fibers angle increases linearly from the anterior to the posterior anulus (Holzapfel *et al.*, 2005). Along the disc height, the fibers angle can vary by up to  $35^\circ$  (Marchand et Ahmed, 1990). In the outer AF, four to eight outer lamellae overlap the annular epiphysis (Marchand et Ahmed, 1990) and the fibers orient with the longitudinal ligaments (Peacock, 1952).

Failure of the AF can lead to herniation, involving pain and work disabilities. Failure can be initiated by abnormal mechanical loads, repeated movements, or disease (Raj, 2007). In human factors engineering, increasing knowledge about IVD's response to various postures and loading conditions is useful to improve handling procedures, set safer load limits and design ergonomic equipment/workstation.

Investigation of IVD mechanics and degeneration aims at obtaining the stress state in discs and surrounding tissues, and understanding the role of the constituents. It is not yet possible to measure tensile and shear stresses experimentally and therefore mathematical and numerical models are good alternatives (Natarajan *et al.*, 2008; Adams *et al.*, 2009). Researchers are attracted by the finite element (FE) method because of its capability to model complex systems. FE method is undoubtedly powerful and possibly the best tool available to study IVD mechanics. Yet, experimental and FE methods lack a complementary method to allow triangulation of results. Sophisticated and finely detailed FE models of IVDs use phenomenological modeling to adjust the material constants of constitutive material models until they behave as expected. This strategy is appropriate, but must be used cautiously, especially when a model is used in conditions for which it was not calibrated. Furthermore, few variables can be measured experimentally to calibrate these models. It has been suggested that a good constitutive model of biological tissues should be founded on micromechanical analysis (Guo *et al.*, 2012). To improve the calibration of such models, a method has been suggested to construct a FE model which uses the phenomenological approach, but that is calibrated in steps, adding components of the IVD one at a time (Ezquerro *et al.*, 2011).

Obviously, the study of biological tissues is complex, which explains why the experimental and finite element methods are, besides rare exceptions, the only two approaches used. However,

what if methodological triangulation was possible ? What if a third approach was available to support (or challenge) the results of the two others ? The intent of the authors' actual work is to develop a complementary method, and analytical modeling seems promising. This novel tool may not be as sophisticated as state-of-the-art FE models, but could at least help their validation and bring insights to specific characteristics of the discs.

The main challenge in developing an analytical model of an IVD resides in choosing theories that consider complex disc geometry, structure, materials, load combinations, and that are scalable for improvements. As a first step, simplifications are necessary to validate the potential of the theories and their implementation into the model. Niemeyer *et al.* (2012) have shown that parameters related to the IVD have the greatest influence on motion segment behavior. They concluded that modeling the IVD alone may, by its simplicity, be more valuable than modeling a whole spinal segment. It is thus advised to focus, at the beginning stage, on modeling the NP and AF.

Most of the published analytical models were based on theories related to thick-walled pressure vessels (Hickey et Hukins, 1980; Hukins, 1992; Prud'Homme, 2008) and thin-walled pressure vessels (McNally et Arridge, 1995; Demers *et al.*, 2013). Although the theory of thick-walled pressure vessels allows to calculate stresses across the disc thickness with only few equations, it inherently neglects interface movement between adjacent lamellae that may occur during spinal motion and disc loading (Gregory *et al.*, 2012). This overestimates bending stiffness of the AF, in contrast to thin-shell theory, which allows frictionless contact or contact stiffness between the lamellae. Moreover, thin-shell theory is compatible with a variety of shells of revolution, which is useful to simulate disc bulge and curvature variations of the lamellae due to loading and postural changes. However, it is normally used in axisymmetric shells.

In a previous work (Demers *et al.*, 2013), an analytical model of a simplified IVD using thin-shell theory was developed, in which the lamellae were taken as the elementary structural units, as has been suggested previously (Holzapfel *et al.*, 2005). The model included a sagittal curvature to simulate disc bulge. An iterative method was provided to account for geometry

evolution due to large deformations. Static equilibrium and compatibility of displacements were verified for every lamella to yield the membrane stresses. The attachment of the lamellae to the endplates was ignored and the material was linear and isotropic.

The objectives of this study are to include the fiber and matrix composition of the multi-shell AF in an analytical model based on thin-shell and composite materials theories, and to identify the necessary and possible improvements for analytical modeling. Increasing model realism step-wise will reinforce model internal validity while providing confidence in the modeling approach presented in this paper. In this study, the disc is simplified to an axisymmetric lumbar disc subjected to axial compression. The lamellae anchorage into the endplates is included using the beam-on-elastic-foundation theory. The stresses in the lamellae obtained from the developed analytical model are compared to those of a simplified FE model and validated against available literature data. The simplifications used are discussed in the paper, and recommendations are given for model improvement.

## 6.2 Methods

### 6.2.1 Model Parameters

The disc is simplified to an axisymmetric barrel composed of  $n = 24$  concentric lamellae (Marchand et Ahmed, 1990). Each lamella is given a constant thickness  $t$  of 0.2 mm, which is in the range of measured values in the literature (Cassidy *et al.*, 1989). Discs have a transverse cross section that goes from grossly circular in the cervical spine to nearly elliptical in the lumbar spine (Eijkelkamp, 2002). To define the axisymmetric model, the outside radius of the disc, at the endplates, is approximated to 21 mm by taking mean values of minor and major axes of an elliptical contour for the lumbar discs, as described elsewhere (Prud'Homme, 2008). The inside radius of the disc, at the endplates, is thus 16.2 mm. A value of 0.5 mm is assumed reasonable for the bulge  $b$  at rest since no experimental data is available. Bulge is defined as the radial protrusion of the disc at the transverse plane of symmetry, hereafter called the mid-transverse

plane. The fibers angle  $\beta_f$  in the lamellae is considered constant at  $\pm 30^\circ$ , being negative in odd lamellae and positive in even lamellae.

### 6.2.2 Analytical Model

The analytical approach consists of coupling the membrane solution resulting from pressure to the discontinuity solution produced by edge loads due to the endplate anchorage (Zingoni, 1995). The membrane solution evaluates the pressure effect on stresses and strains based on static equilibrium of thin adjacent lamellae. The discontinuity solution accounts for the lamellae anchorage into the endplates provided by the Sharpey's fibers (Johnson *et al.*, 1982), and is based on the theory of beam on an elastic foundation. The multi-lamellar structure of the AF is modeled using thin-shell theory, and the anisotropy of the lamellae is included using the theory of composite materials.

The large deformations of the soft AF tissues are considered using an iterative method, in which each iteration uses a fractional amount of the total pressure acting inside the NP. Each fractional pressure is a load increment leading to small deformations of the lamellae, ensuring the applicability of thin-shell theory to the context of the IVD. It is considered that the deformation is small when the stress obtained by applying the pressure on the deformed geometry is comparable within 1% to the stress obtained with the initial geometry. This is achieved by dividing the total pressure into a certain number of load increments, found using the algorithm presented in Fig. 6.1. The stress used for this convergence criterion is the circumferential stress of the innermost lamella, at the mid-transverse plane.

Once the load increment and number of iterations  $I$  are obtained, the procedure illustrated in Fig. 6.1 is followed to get the stresses due to pressure and the edge loads. The pressure effect generates circumferential membrane forces,  $N_\theta$ , longitudinal membrane forces,  $N_\phi$ , and displacements,  $\delta^{[m]}$ . The final displacements are then imposed at the endplates and at the mid-transverse plane as boundary conditions to solve for the edge effects. This involves the determination of the edge forces,  $F_{UVE}$  and  $F_{LVE}$ , acting respectively at the upper vertebral endplate

(UVE) and the lower vertebral endplate (LVE), and the slenderness ratio  $\lambda$  of each lamella. The discontinuity stresses are then obtained. This process is iterated  $I$  times before the final stresses in the circumferential, longitudinal and the two principal directions are obtained.

### 6.2.2.1 Membrane Shell Analysis

The NP is modeled using a hydrostatic pressure, which is justified for quasi-static equilibrium analyses (Iatridis *et al.*, 1996). A pressure  $p_{NP}$  of 1.94 MPa in the NP is used to represent a compressive load of 2000 N (Adams *et al.*, 1996) corresponding to manual labour within prescribed limits (Adams *et al.*, 1996; Nachemson, 1981). Figure 6.2 (a) shows the membrane forces  $N_\theta$  and  $N_\phi$ , expressed in N/mm, acting on an isolated infinitesimal membrane element. The  $r$  axis is normal to the membrane element and indicates the radial direction. The  $\theta$  and  $\phi$  axes indicate the circumferential and longitudinal directions, respectively. The free body diagram in Fig. 6.2 (b) is used to write the static equilibrium equation in the axial direction :

$$r_{s,i,1}^2 p_{NP} - F_{comp} - 2 \sum_{j=1}^n (N_{\phi,i,j} r_{h,i,j} \sin \phi_{i,j}) = 0 \quad (6.1)$$

where  $r_{s,i,1}$  is the horizontal radius on the inside surface of the membrane element on lamella 1,  $F_{comp}$  is the axial compressive load applied on the disc,  $\phi_{i,j}$  is the angular position of the membrane element relative to the spinal axis  $z$ , and  $r_{h,i,j}$  is the horizontal radius of the membrane element taken at equilibrium plane  $i$ . Note that  $r_{h,i,j}$  is related to the major radius  $R$ , the circumferential radius  $r_\theta$  and the longitudinal radius  $r_\phi$  by the following equations :

$$r_{h,i,j} = R + r_{\phi,j} \sin \phi_{i,j} \quad (6.2)$$

$$r_{h,i,j} = r_{\theta,i,j} \sin \phi_{i,j} \quad (6.3)$$

The equilibrium plane notation  $i$  starts with 1 at the UVE and ends with  $m$  at the mid-transverse plane. The subscript  $j$  identifies the lamella, starting with 1 inside of the AF and ending with  $n$  outside of the AF.

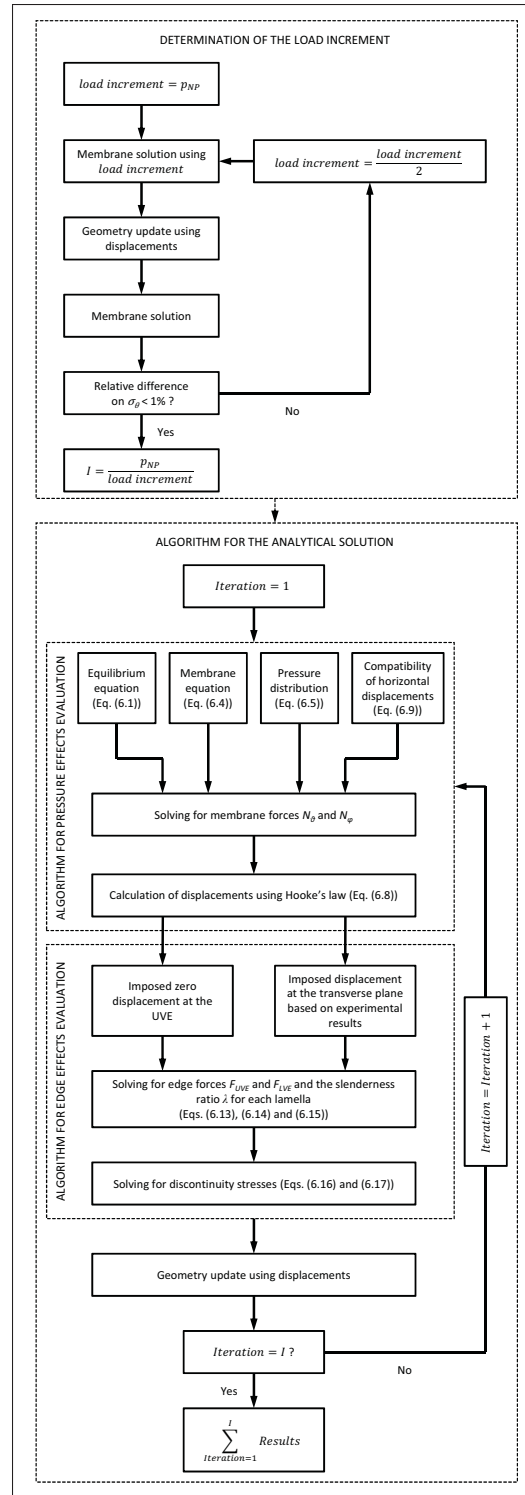


Figure 6.1 Analytical method



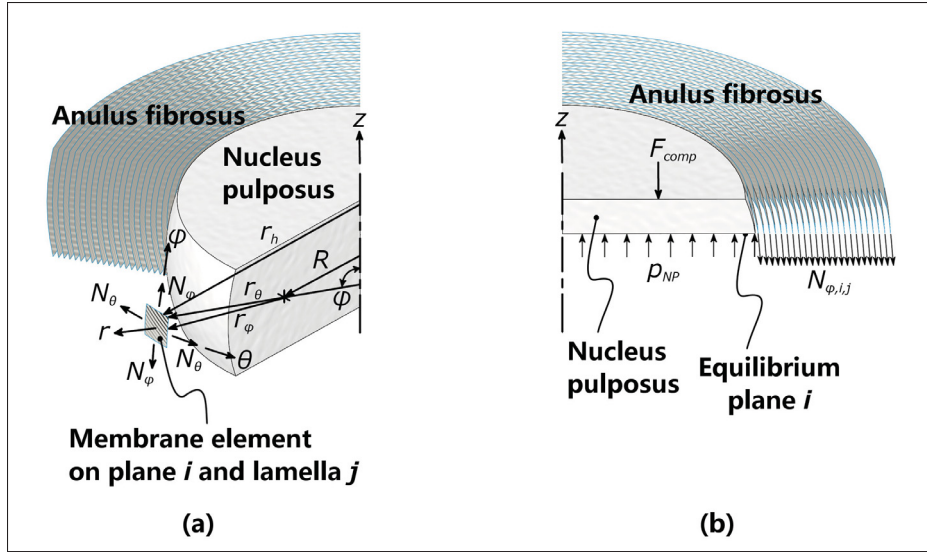


Figure 6.2 Free body diagrams (a) Force equilibrium on a membrane element isolated from lamella  $j$ , at equilibrium plane  $i$ , shown with geometrical parameters (b) Force equilibrium along vertical axis  $z$ , using the compressive force  $F_{comp}$ , the force induced by intradiscal pressure  $p_{NP}$ , and the vertical component of the longitudinal membrane force  $N_{\phi,i,j}$  in each lamella

The equation of membrane shell theory relates the longitudinal and circumferential forces to the contact pressure  $p_s$  between adjacent lamellae :

$$\frac{N_{\theta,i,j}}{r_{\theta,i,j}} + \frac{N_{\phi,i,j}}{r_{\phi,i,j}} = (p_{s,i,j} - p_{s,i,j+1}) \quad (6.4)$$

where the contact pressure at the lamellae interfaces is assumed to follow the radial stress distribution given by Lamé (1866) if we neglect the swelling pressure in the inner AF :

$$p_{s,i,j} = \frac{\left(1 - \frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,j}^2}\right)p_{NP} + \left(\frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,j}^2} - \frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,in}^2}\right)p_{out}}{\frac{r_{s,\theta,i,out}^2}{r_{s,\theta,i,in}^2} - 1} \quad (6.5)$$

The radial pressure distribution could be taken from experimental data when available. Note that, in Eq. (6.4),  $p_{s,i,1} = p_{NP}$  and  $p_{s,i,n+1} = p_{out}$ .

The circumferential and longitudinal strains can be evaluated using Hooke's law, neglecting shear stress in the  $\theta - \varphi$  axes for simplification :

$$\varepsilon_{\theta,i,j} = \frac{1}{t_j} (\bar{S}_{11}N_{\theta,i,j} + \bar{S}_{12}N_{\varphi,i,j}) \quad (6.6)$$

$$\varepsilon_{\varphi,i,j} = \frac{1}{t_j} (\bar{S}_{12}N_{\theta,i,j} + \bar{S}_{22}N_{\varphi,i,j}) \quad (6.7)$$

where  $\bar{S}_{11}$ ,  $\bar{S}_{12}$  and  $\bar{S}_{22}$  are components of the transformed compliance matrix obtained from the material properties presented in section 6.2.3. Equation (6.6) is used to evaluate the horizontal membrane displacement  $\delta^{[m]}$  at each lamella :

$$\delta_{i,j}^{[m]} = r_{\theta,i,j} \varepsilon_{\theta,i,j} \sin \varphi_{i,j} \quad (6.8)$$

where the superscript  $[m]$  refers to the membrane solution.

The following condition is used to ensure that adjacent lamellae stay in contact :

$$\delta_{i,j}^{[m]} = \delta_{i,j+1}^{[m]} \quad (6.9)$$

Equations (6.1) to (6.9) give a system of  $2mn$  equations to be resolved that yield the circumferential and longitudinal membrane forces at any point due to pressure.

### 6.2.2.2 Discontinuity Analysis

Figure 6.3 shows the boundary conditions imposed on the lamellae. The UVE and the LVE are considered perfectly rigid, the simplification of which influences the stresses by less than 4% (Little *et al.*, 2007). Hence, the horizontal displacements at the endplates are negligible. The edge forces  $F_{LVE}$  and  $F_{UVE}$  must be such that the final displacement at both endplates is zero :

$$\delta_{LVE,j}^{[m]} + \delta_{LVE,j}^{[d]} = \delta_{LVE,j}^{[f]} = 0 \quad (6.10)$$

$$\delta_{UVE,j}^{[m]} + \delta_{UVE,j}^{[d]} = \delta_{UVE,j}^{[f]} = 0 \quad (6.11)$$

where  $[d]$  and  $[f]$  refer to the discontinuity analysis and the final (total) solution, respectively. The subscripts *LVE* and *UVE* indicate that the solution is evaluated at the lower and upper vertebral endplates, respectively.

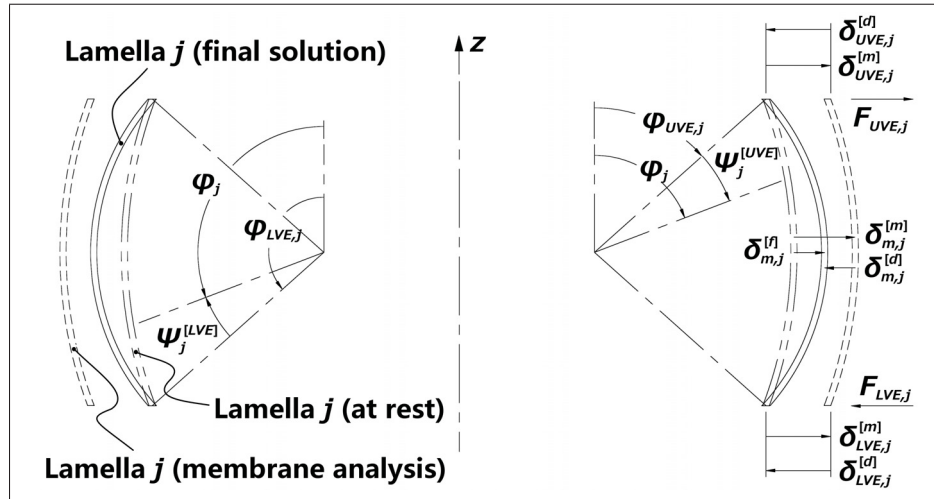


Figure 6.3 Boundary conditions

Applying the beam-on-elastic-foundation theory to ogival shells (Zingoni, 2001), the horizontal displacement caused by the edge forces is obtained, including the superposed effect of both endplates :

$$\delta_{i,j}^{[d]} = \frac{\sqrt{2}\lambda_j}{E_{eff,\varphi,j}t_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\varphi,i,j}} \right) \sin \varphi_{i,j} \left[ \sqrt{2}F_{LVE,j} \sin(\varphi_{LVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} - \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{2}F_{UVE,j} \sin(\varphi_{UVE,j}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \sin \left( \lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (6.12)$$

where  $\Psi_{i,j}^{[LVE]} = \varphi_{LVE,j} - \varphi_{i,j}$ ,  $\Psi_{i,j}^{[UVE]} = \varphi_{i,j} - \varphi_{UVE,j}$  and the slenderness ratio  $\lambda$  is a variable to be resolved for each lamella.  $E_{eff,\varphi,j}$  is the effective Young's modulus of the lamellae in the longitudinal direction, as detailed in section 6.2.3. Solving for the edge forces and the slenderness ratio is achieved by substituting Eqs. (6.8) and (6.12) into the following equations

describing the boundary conditions :

$$\delta_{UVE,j}^{[d]} = -\delta_{UVE,j}^{[m]} \quad (6.13)$$

$$\delta_{m,j}^{[m]} + \delta_{m,j}^{[d]} = \delta_{m,j}^{[f]} \quad (6.14)$$

noting that :

$$F_{LVE,j} = -F_{UVE,j} \quad (6.15)$$

due to symmetry with the mid-transverse plane.

The solution for the edge forces and the slenderness ratio can then be used in Eq. (6.12) to obtain the displacement of the discontinuity solution at any location in the IVD, and can also be used to solve for the membrane forces of the discontinuity solution :

$$\begin{aligned} N_{\phi,i,j}^{[d]} = & \cot(\phi_{LVE,j} - \Psi_{i,j}^{[LVE]}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \\ & F_{LVE,j} \sin(\phi_{LVE,j}) \left( \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) - \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) \right) \\ & + \cot(\phi_{UVE,j} + \Psi_{i,j}^{[UVE]}) e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} \\ & F_{UVE,j} \sin(\phi_{UVE,j}) \left( \sin(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) - \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} N_{\theta,i,j}^{[d]} = & -2 \left( \frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\phi,i,j}} \right) \lambda_j \left[ e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} F_{LVE,j} \sin \phi_{LVE,j} \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}) \right. \\ & \left. - e^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}} F_{UVE,j} \sin \phi_{UVE,j} \cos(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[UVE]}) \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

The final stresses  $\sigma^{[f]}$  are obtained by adding the stresses due to pressure and the stresses due to the edge forces, taking into consideration the change in geometry due to large deformations :

$$\sigma_{\varphi,i,j}^{[f]} = \frac{N_{\varphi,i,j}^{[f]}}{t_j} = \frac{N_{\varphi,i,j}^{[m]}}{t_j} + \frac{N_{\varphi,i,j}^{[d]}}{t_j} \quad (6.18)$$

$$\sigma_{\theta,i,j}^{[f]} = \frac{N_{\theta,i,j}^{[f]}}{t_j} = \frac{N_{\theta,i,j}^{[m]}}{t_j} + \frac{N_{\theta,i,j}^{[d]}}{t_j} \quad (6.19)$$

### 6.2.3 Material Properties

The AF material is modeled as a balanced antisymmetric angle-ply (Gibson, 2007) having fiber orientations  $\beta_f$  of  $\pm 30^\circ$ , similar to the one shown in Fig. 6.4. To account for the lamellae

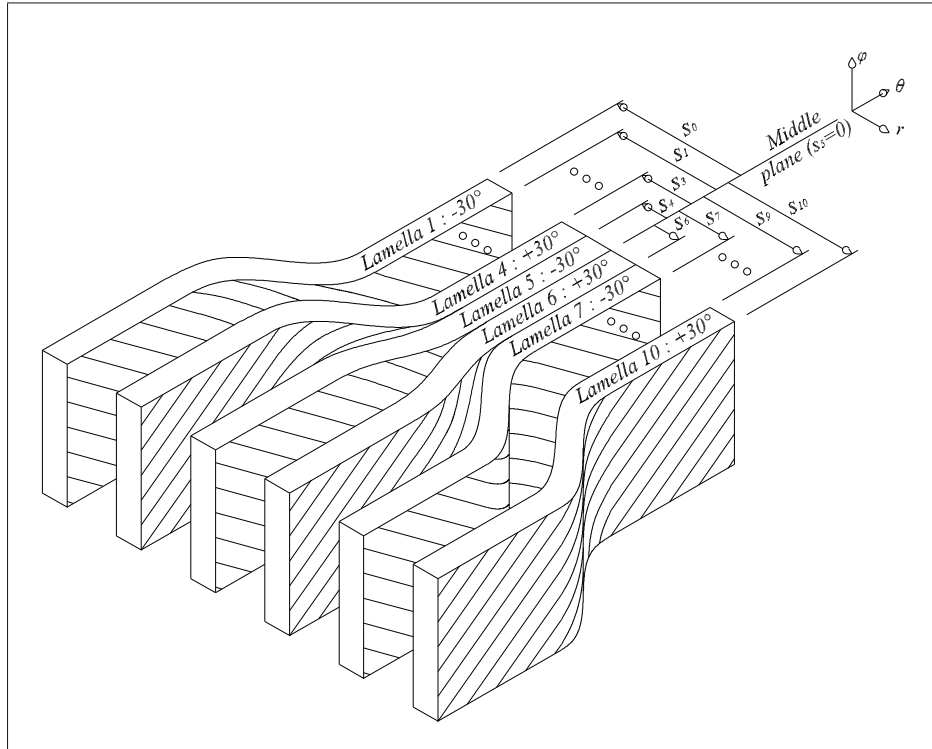


Figure 6.4 Material model

anchorage into the endplates, O'Connell *et al.* (2012) measured the material properties from

biaxial tensile tests on annulus fibrosus samples having a thickness  $t^{sample}$  of 2.1 mm. They found that the modulus calculated in the circumferential direction was similar for uniaxial and biaxial tension. This was not the case in the longitudinal direction, indicating that biaxial tension is necessary for the determination of the Young's modulus in that direction. Considering that the lamellae thicknesses are in the range of 0.2 mm (Cassidy *et al.*, 1989), it can be assumed that the test samples were composed of approximately 10 lamellae. The total number of lamellae of a sample is assigned to the parameter  $n^{sample}$  in the following developments. For this laminate sample, the Young's modulus  $E_{\theta}^{sample}$  in the circumferential direction was 21.0 MPa, the Young's modulus  $E_{\phi}^{sample}$  in the longitudinal direction was 12.5 MPa and the shear modulus  $G_{\theta\phi}^{sample}$  was 9.64 MPa. These experimental material properties are summarized in Table 6.1.

Tableau 6.1 Experimental material properties of lamellae bundles  
drawn from O'Connell *et al.* (2012)

$t^{sample}$ (mm)	$n^{sample*}$	$\beta_f^{**}$ (degree)	$E_{\theta}^{sample}$ (MPa)	$E_{\phi}^{sample}$ (MPa)	$G_{\theta\phi}^{sample}$ (MPa)
2.1	10	$\pm 30$	21.0	12.5	9.64

\* Estimated according to lamellae thickness used in this study

\*\* Average value based on Marchand et Ahmed (1990)

In a general laminated plate obeying Hooke's law, the complete stiffness matrix relating membrane forces and moments to strains is expressed as (Gibson, 2007) :

$$\begin{bmatrix} [A] & \vdots & [B] \\ \cdots & & \cdots \\ [B] & \vdots & [D] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

where  $[A]$  is the laminate extensional stiffness matrix,  $[B]$  is the laminate-coupling stiffness matrix and  $[D]$  is the laminate-bending stiffness matrix. Neglecting friction between adjacent lamellae and assuming negligible bending stiffness of the lamellae,  $[B]$  and  $[D]$  can be neglected.

ted. The extensional stiffness matrix is expressed as :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

where  $A_{16} = A_{26} = 0$  in an antisymmetric laminate. The laminate properties can be transformed from the principal material axes to the  $\theta - \phi$  axes using the following equations :

$$E_{\theta}^{sample} = \frac{1}{t^{sample} A'_{11}} \quad (6.22)$$

$$E_{\phi}^{sample} = \frac{1}{t^{sample} A'_{22}} \quad (6.23)$$

$$G_{\theta\phi}^{sample} = \frac{1}{t^{sample} A'_{66}} \quad (6.24)$$

where  $[A'] \rightarrow [A]$  in the case where  $[B]$  and  $[D]$  are negligibly small.

The equation for  $A_{kl}$  is :

$$A_{kl} = \sum_{j=1}^{n^{sample}} (\bar{Q}_{kl})_j (s_j - s_{j-1}) \quad (6.25)$$

where  $k$  and  $l$  identify the row and column of the transformed stiffness matrix  $[\bar{Q}]$ , respectively. The distance  $s$  is taken from the sample's medial surface, as shown in Fig. 6.4. The components of the transformed lamellae stiffness matrix  $\bar{Q}_{11}$ ,  $\bar{Q}_{12}$ ,  $\bar{Q}_{22}$  and  $\bar{Q}_{66}$  can be obtained using the following equations (Gibson, 2007) :

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \beta_f + Q_{22} \sin^4 \beta_f + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \beta_f \cos^2 \beta_f \quad (6.26)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \beta_f \cos^2 \beta_f + Q_{12} (\cos^4 \beta_f + \sin^4 \beta_f) \quad (6.27)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \beta_f + Q_{22} \cos^4 \beta_f + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \beta_f \cos^2 \beta_f \quad (6.28)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \beta_f \cos^2 \beta_f + Q_{66} (\sin^4 \beta_f + \cos^4 \beta_f) \quad (6.29)$$

It is assumed that the stiffness matrix is identical for every lamella, although material stiffness varies with location in the AF (Holzapfel *et al.*, 2005). The components of the lamellae stiffness matrix, i.e.  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{22}$  and  $Q_{66}$ , are related to the engineering constants of individual lamellae as follows (Gibson, 2007) :

$$Q_{11} = \frac{E_f}{1 - \nu_{ft}\nu_{tf}} \quad (6.30)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{ft}E_t}{1 - \nu_{ft}\nu_{tf}} \quad (6.31)$$

$$Q_{22} = \frac{E_t}{1 - \nu_{ft}\nu_{tf}} \quad (6.32)$$

$$Q_{66} = G_{ft} \quad (6.33)$$

$$\nu_{tf} = \frac{\nu_{ft}E_t}{E_f} \quad (6.34)$$

The engineering constants need to be resolved using  $E_\theta^{sample}$ ,  $E_\varphi^{sample}$ ,  $G_{\theta\varphi}^{sample}$  and the major Poisson's ratio  $\nu_{ft}$ . Because of its high water content, the collagen matrix is assumed to be nearly incompressible. Therefore, a value of 0.45 is chosen for the major Poisson's ratio. The engineering constants in the principal axes of individual lamellae are given in Table 6.2.

Tableau 6.2 Theoretical material properties of individual lamellae

$E_f$ (MPa)	$E_t$ (MPa)	$G_{ft}$ (MPa)	$\nu_{ft}$	$\nu_{tf}$	$E_{eff,\theta}$ (MPa)
41.1	17.2	3.45	0.45	0.19	17.4
$E_\theta$ (MPa)	$E_\varphi$ (MPa)	$G_{\theta\varphi}$ (MPa)	$\nu_{\theta\varphi}$	$\nu_{\varphi\theta}$	$E_{eff,\varphi}$ (MPa)
14.8	11.9	6.64	0.68	0.54	13.5

The discontinuity analysis uses the flexural rigidity of the composite lamellae in the  $\varphi$  direction (Vasiliev, 2009) :

$$D_{22,j} = \frac{1}{12} \bar{Q}_{22} t_j^3 \quad (6.35)$$



For simplification, an effective Young's modulus  $E_{eff,\varphi}$  in the longitudinal direction is used. Substituting Eq. (6.35) for the flexural rigidity of an isotropic shell subjected to bending yields :

$$E_{eff,\varphi,j} = \frac{12 \left(1 - \nu_{\varphi\theta,j}^2\right) D_{22,j}}{t_j^3} \quad (6.36)$$

where  $\nu_{\varphi\theta}$  is obtained by performing axes transformation (Gibson, 2007) :

$$E_\varphi = \left[ \frac{1}{E_f} \sin^4 \beta_f + \left( \frac{1}{G_{ft}} - \frac{2\nu_{ft}}{E_f} \right) \sin^2 \beta_f \cos^2 \beta_f + \frac{1}{E_t} \cos^4 \beta_f \right] \quad (6.37)$$

$$\nu_{\varphi\theta} = E_\varphi \left[ \frac{\nu_{ft}}{E_f} (\sin^4 \beta_f + \cos^4 \beta_f) - \left( \frac{1}{E_f} + \frac{1}{E_t} - \frac{1}{G_{ft}} \right) \sin^2 \beta_f \cos^2 \beta_f \right] \quad (6.38)$$

The effective Young's modulus in the circumferential direction can be obtained in a similar manner. The material properties in the  $\theta - \varphi$  axes are given in Table 6.2, along with the effective Young's moduli.  $\nu_{\theta\varphi}$ ,  $E_{eff,\theta}$  and  $G_{\theta\varphi}$  are given for completeness of material definition but are not used in the solution of this study.

#### 6.2.4 Finite Element Model

The finite element model is developed using ANSYS V14 (ANSYS, 2011). The NP is modeled as an incompressible liquid using hydrostatic fluid elements, HSFLD241. The lamellae are modeled using axisymmetric shell elements, SHELL209, which have bending and membrane stiffness, and torsion capability to account for shear in the  $\theta - \varphi$  plane. The lamellae interaction is controlled by contact elements, CONTA172, with no friction and no separation. The penalty stiffness is set to 3 to limit penetration. The other contact parameters are set to defaults. The material is defined using the anisotropic elastic material model (ANEL). The compliance matrix of a three dimensional orthotropic material with respect to the fiber orientation is of the

form (Gibson, 2007) :

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_f & -\nu_{tf}/E_t & -\nu_{rf}/E_r & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{ft}/E_f & 1/E_t & -\nu_{rt}/E_r & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{fr}/E_f & -\nu_{tr}/E_t & 1/E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{tr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{rf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{ft} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

In the case of transversely isotropic material,  $E_r = E_t$ ,  $\nu_{rf} = \nu_{tf}$ ,  $\nu_{tr} = \nu_{rt}$  and  $G_{rf} = G_{ft}$ . Poisson's ratios  $\nu_{tr}$  and  $\nu_{rt}$  are set to 0.45 based on the assumption of nearly incompressible material. The shear modulus  $G_{tr}$  of 5.95 MPa is obtained by using the isotropic relationship for engineering constants (Gibson, 2007) :

$$G_{tr} = \frac{E_t}{2(1 + \nu_{rt})} \quad (6.40)$$

### 6.3 Results

The analytical solution was obtained using 5 equilibrium planes and 42 load increments. The finite element analysis convergence was achieved using 80 shell elements per lamella. A load of 1700 N was applied to get a pressure buildup of 1.94 MPa in the NP. The displacement imposed at the transverse plane in the analytical model was 1.89 mm to fit with the FE model. The estimated contact pressures are given in Fig. 6.5. The distribution is nonlinear for both models but the analytical values are overestimated by up to 0.24 MPa between the 10<sup>th</sup> and 11<sup>th</sup> lamellae, in comparison to the FE model. This represents a relative difference of 33%. Not shown in Fig. 6.5 is the sudden increase of contact pressure near the endplates obtained by FE model. This differs from the analytical model in which contact pressure variation with respect to  $z$  is very small.

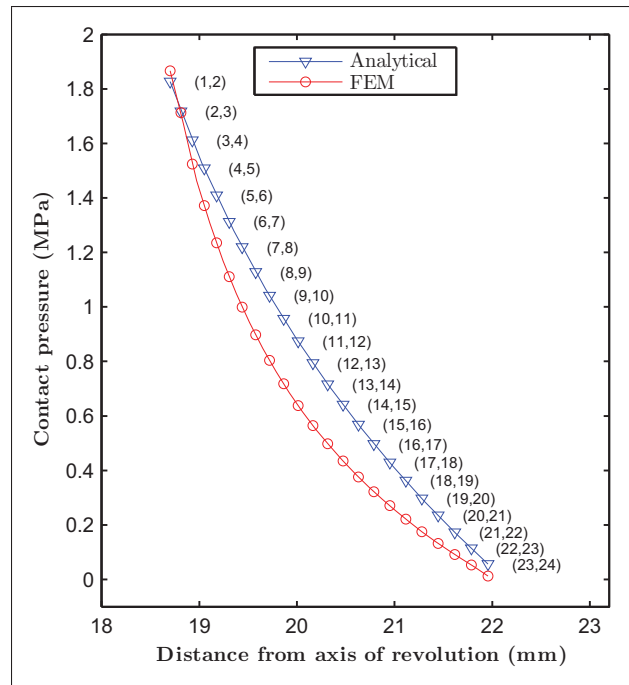


Figure 6.5 Contact pressure between adjacent lamellae at the transverse plane

In Fig. 6.6 (a), the final circumferential stress in the innermost lamella is divided into membrane and discontinuity stresses. The membrane analysis neglects the attachment of the lamellae into the endplates, generating large stresses near the endplates. The edge forces have an important effect on stress attenuation, such that the combined circumferential stress is maximum at the mid-transverse plane and minimum at the endplates. In Fig. 6.6 (b), the circumferential stress is compared to that predicted by the FE model.

Figure 6.7 shows the circumferential, longitudinal, 1<sup>st</sup> principal and 2<sup>nd</sup> principal stress distributions across the AF thickness, at the mid-transverse plane. Both models predict higher circumferential stress than longitudinal stress and higher 1<sup>st</sup> principal stress than 2<sup>nd</sup> principal stress. The FE model predicts negligibly to slightly higher 1<sup>st</sup> principal stress than circumferential stress, and negligibly to slightly lower 2<sup>nd</sup> principal stress than longitudinal stress. The difference between these components is more pronounced in the analytical model. The stresses predicted analytically decrease from the innermost lamella down to the outermost lamella, while the FE model predicts minimum plateaus for the circumferential and 1<sup>st</sup> principal stresses

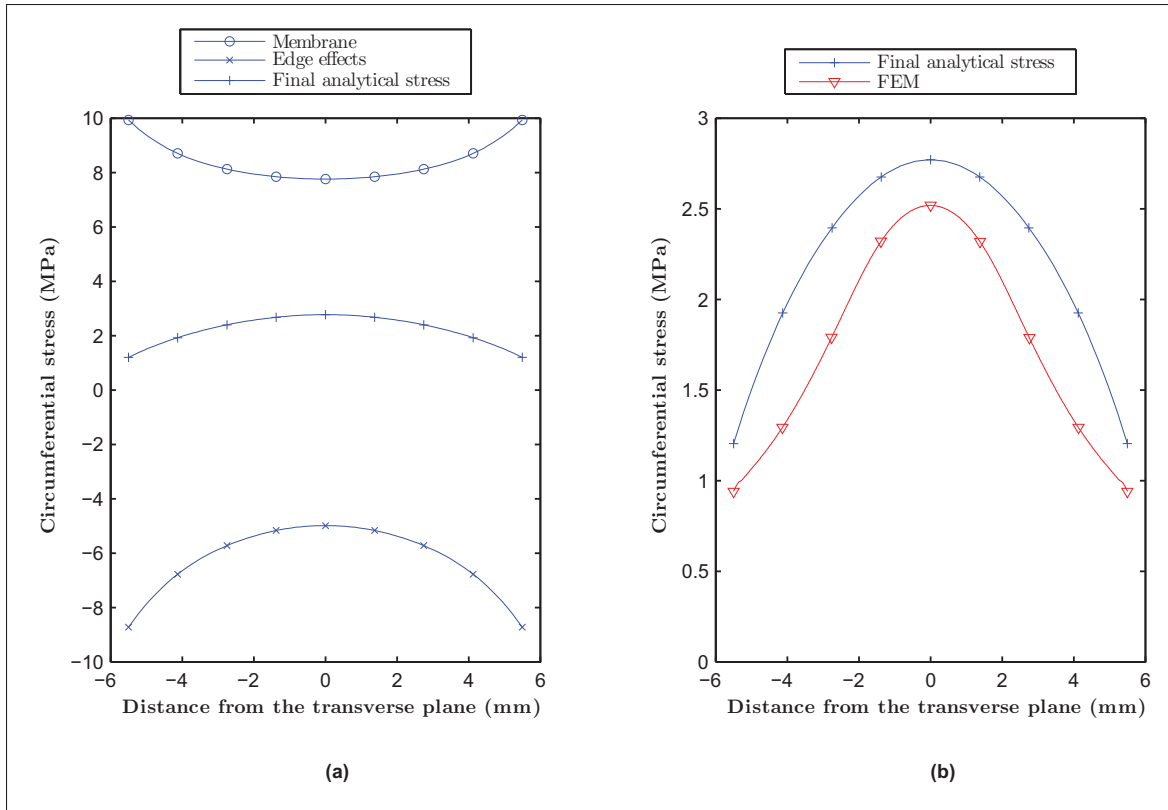


Figure 6.6 (a) Final circumferential stress obtained analytically in the innermost lamella, and divided into membrane and discontinuity stresses (b) Comparison of the final analytical circumferential stress to that of FE model

around the 17<sup>th</sup> to the 21<sup>st</sup> lamella, and minimum longitudinal and 2<sup>nd</sup> principal stresses at the 15<sup>th</sup> lamella. Both models indicate that the innermost lamella is subjected to higher stresses. The stress values at the transverse plane are summarized in Table 6.3 for the innermost and outermost lamellae. The shear stresses in the principal axes,  $\tau_{fi}$ , are also given, and their large percentage differences are discussed later in the text. In Fig. 6.7, the circumferential and longitudinal stresses for an isotropic material are added to show the importance of considering the anisotropic material properties. The latter has small influence on the longitudinal stress but an important effect on the decrease of the circumferential stress. For instance, the analytical and FE models respectively predict a drop of 44% and 43% of the circumferential stress at the innermost lamella when considering anisotropy.

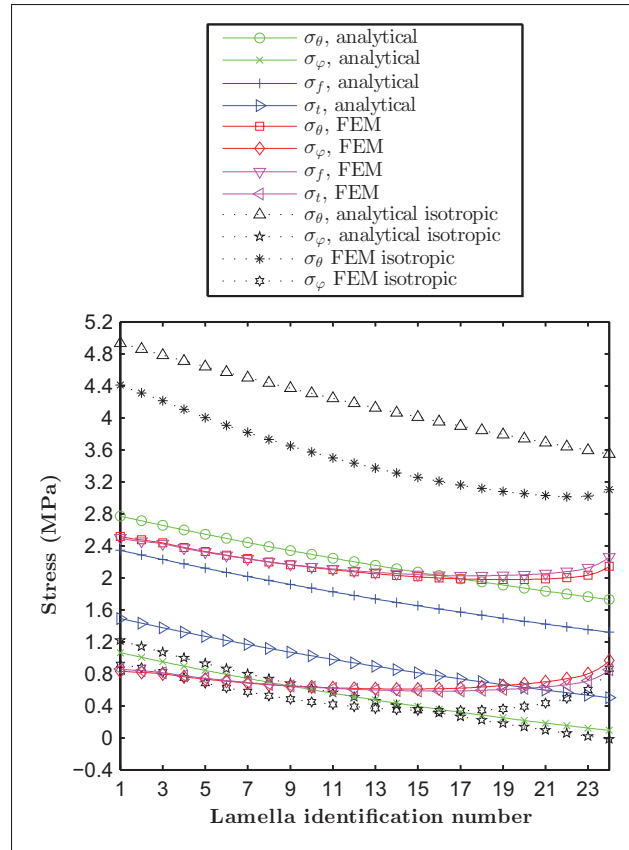


Figure 6.7 Stresses through the AF thickness at the transverse plane

Tableau 6.3 Stress results at the transverse plane

Lamella	Model	$\sigma_\theta$ (MPa)	$\sigma_\phi$ (MPa)	$\sigma_f$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)	$\tau_{ft}$ (MPa)
1	Analytical	2.77	1.06	2.34	1.49	0.74
	FEM	2.52	0.83	2.50	0.86	0.50
	% difference*	9.9	27.7	-6.4	73.3	48
24	Analytical	1.73	0.09	1.32	0.50	-0.71
	FEM	2.14	0.97	2.26	0.85	-0.27
	% difference*	-19.2	-90.7	-41.6	-41.2	163

\* FEM results used as reference values

Figure 6.8 shows the initial and deformed shape of the AF. In the inner AF of the FE model, the sagittal profiles of the deformed lamellae are composed of one positive and two negative curvatures. A negative curvature is defined as having its center of curvature on the exterior side

of the lamella. In the analytical model, the sagittal profiles are defined as circular arches at each step of the geometry update. Therefore, the true shape is not considered when each load increment is applied, and the deformed shape seen in Fig. 6.8 is the result of the sum of the displacements calculated for each load increment.

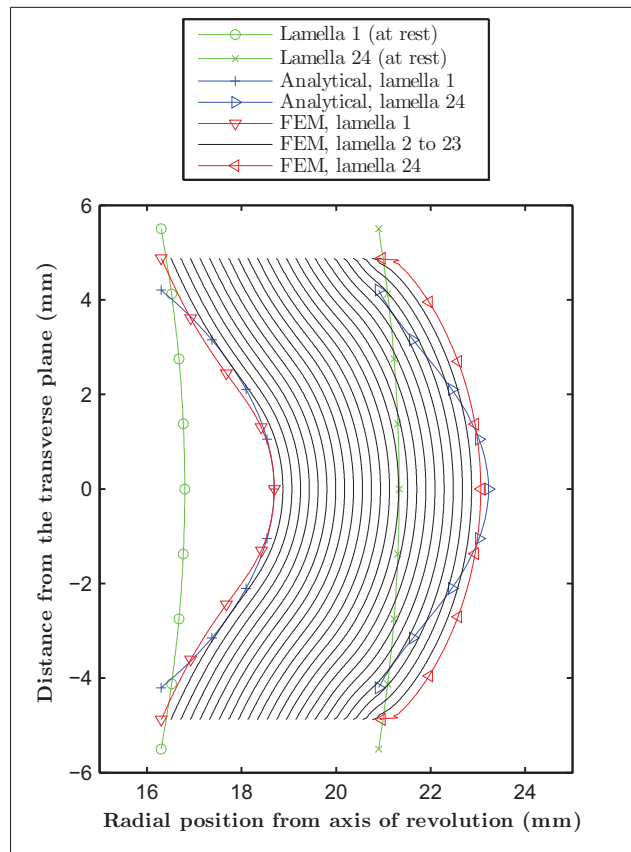


Figure 6.8 Initial and deformed shape of the lamellae obtained by the analytical and finite element modeling. The initial shape and the analytical deformed shape are only shown for the innermost and outermost lamellae

## 6.4 Discussion

The stress distributions shown in Fig. 6.6 demonstrate the ability of the theory of beam on elastic foundation to account for the edge effects produced by the rigid endplates. The slenderness ratio of each lamella was set as a variable to be resolved to allow the displacements to respect the imposed boundary conditions within the relatively short height of the IVD. Any experimental bulge value could be used to calibrate the model, but it was set equal to that obtained with the FE model, for the purpose of model comparison. Linear extrapolation of the median bulge measured by O'Connell *et al.* (2010) yields a value of approximately 1 mm, corresponding to a load of 1700 N. This is 45% below the value obtained in the FE model. This difference can be explained by several factors. Firstly, the bulge in this study is overestimated due to the disc cross-sectional area that is 33% less than measured mean values (O'Connell *et al.*, 2010), and because the swelling pressure in the AF was ignored. Secondly, the material was assumed linear and constant through the AF thickness. The linear properties were calculated based on experimental results in the linear-region of the stress-strain curve, defined as the slopes of the stress-strain response at the mid-point between the transition strain and the maximum strain of 10% (O'Connell *et al.*, 2012). This region of the curve is considered by the authors to be representative of the general behavior of the tissues over the entire range of the stress-strain curve, although nonlinear properties would be more representative of the real behavior. The calculated stiffness of 41 MPa is 18.5% lower than the average values obtained by Holzapfel *et al.* (2005) for their « high » elastic moduli of single lamellae, but is 40% higher than the average values of « high » elastic moduli in the internal lamellae. Whether hyperelasticity would stiffen or soften the model can hardly be predicted without introducing such feature in the model, and it is important to note that the comparison discussed herein is based on a linear extrapolation of experimental bulge from the literature. The outer lamellae were shown to be stiffer than the inner ones. Hence, assuming constant material properties through the AF thickness can influence bulge. Finally, the differences in disc bulge can also be due to neglecting the adhesion between adjacent lamellae provided by the interlamellar elastic fibers bridging

adjacent lamellae (Smith et Fazzalari, 2009; Gregory *et al.*, 2012). These fibers may generate shear resistance at the lamellar interfaces, but no quantitative data is available in the literature.

The final circumferential stress distribution predicted analytically differs from the FE one, as shown in Fig. 6.6 (b). This is primarily because the geometry of the lamellae are defined using a circular arch at each iteration of the analytical model. The use of a circular arch is not the result of internal mechanical calculations, but is a first approximation of the real shape. Although lamellae may resemble arcs of circle in the unloaded state (Marchand et Ahmed, 1990), the shape of inner lamellae change considerably during compression of the disc because of the supporting effect of adjacent lamellae (Rodrigues *et al.*, 2012), which was reflected in the FE curves of Fig. 6.8, but not in the analytical curves of the same figure. The deformed lamellae of the analytical model, shown in Fig. 6.8, indicate that the two radii,  $r_\theta$  and  $r_\varphi$ , do not correspond to the geometry predicted by the FE model. These radii have an important role in membrane stress analysis and could partly explain the large differences noted in Table 6.3.

Both models predict maximum fiber stress in the innermost lamella. In compression, the stresses are expected to be lower in the inner annulus due to heterogeneous material properties through AF thickness (Noailly *et al.*, 2011). The material was considered heterogeneous, and the fibers angle constant, which may explain the difference with expected results. The fibers angle was shown to vary with radial position (Cassidy *et al.*, 1989) and along the circumference (Holzapfel *et al.*, 2005). The model should be improved by including heterogeneous material properties and fibers angle variation.

The differences between the circumferential and 1<sup>st</sup> principal stress, and between the longitudinal and 2<sup>nd</sup> principal stress, can be due to neglecting the change in fiber angle during the iteration process of the analytical method, but also because the shear stress in the  $\theta - \varphi$  axes was ignored. However, the sign of the shear stresses in Table 6.3 informs us of the behavior of the shear deformation. The shear stress along the principal axes, in lamellae with positively oriented fibers, is negative for both models. The opposite is true for lamellae with negatively oriented fibers. This means that the fibers tend to realign towards the circumferential



axis during loading, which is consistent with the experimental observations of animal models (Klein et Hukins, 1982; Ambard et Cherblanc, 2009) and human models (Guerin et Elliott, 2006). Accounting for fibers reorientation would reduce the difference between the 1<sup>st</sup> principal stress and the circumferential stress, and similarly for the 2<sup>nd</sup> principal stress and the longitudinal stress, as observed in the FE results. It should also reduce the difference between the shear stress of the two models, but this difference is mainly due to the shear stress that was neglected in the  $\theta - \varphi$  axes in the analytical model.

Another explanation for the differences between the models is that the radial compression of the lamellae was neglected in the analytical model but included in the FE model. The AF thickness of the FE model decreases by 0.23 mm, which corresponds to a decrease of about 0.01 mm in each lamella, or 5%. Such thickness variation may have a small influence on the stress response of the IVD, but it should be considered as a model refinement.

The linear and anisotropic material model was chosen as an improvement from the previous linear and isotropic model (Demers *et al.*, 2013). It was demonstrated in Fig. 6.7, that the anisotropic structure of the lamellae reduces the stresses in the case of axial compression. However, the true elastic response of the AF tissue is nonlinear. Hyperelasticity of AF tissue can be included in the FE method as constitutive models (Holzapfel, 2000), mainly based on the phenomenological approach. Adding material nonlinearity to the analytical model could be achieved by updating the material stiffness with load increment based on fiber strains. Accounting for fibers reorientation could also contribute to the hyperelastic response of the lamellae.

It is suggested that bending, torsion and the combined loadings are susceptible to cause disc herniation, but not purely compressive loading (Roaf, 1960; Nachemson, 1981; Gunzburg *et al.*, 1992). The compression loading was chosen for its simplicity, but other loadings must be included in the model for practical interest. In addition, the kidney-bean shape of the lumbar discs should be modeled using an asymmetric geometry, and structural variations along the circumference, such as lamellae thickness and disc height, should also be modeled. The model has been parameterized to allow radial variations of properties, such as lamellae thickness, material

properties and fibers angle. However, the axisymmetric simplification is a limitation of the actual model that must be tackled in future works. Using thin-shell, beam-on-elastic-foundation and composite materials theories to study IVD mechanics is a novelty, and some simplifications were deemed necessary to verify their suitability for that purpose. The comparison with the results of a simplified finite element model allowed us to understand the response of these theories to the application of a compressive load on a soft AF, and to identify improvements that need to be made. Improvements should be added in steps to analyze the influence of each assumption and each parameter of the model. After the recommended improvements are added to the model, a sensitivity analysis would be suggested to deepen the understanding of model behavior and, eventually, add insights to the understanding of IVD mechanics.

## 6.5 Conclusion

The analytical method has been practically abandoned for the study of intervertebral discs due to their complex material properties, structure, loads and behavior. Hence, methodological triangulation is actually deficient. Experimental data are limited for technical and ethical reasons, making the validation of finite element models difficult. Analytical modeling could offer a complementary approach to help validation of other biomechanical model results. This paper presented an analytical method to study the stresses in a multi-shell anulus fibrosus of a simplified intervertebral disc subjected to compression. The model is based on thin-shell, beam-on-elastic-foundation and composite materials theories. Linear anisotropic material properties were obtained from a documented biaxial test to account for in-situ material behavior. An iterative process was used to account for geometry change due to large deformations of the soft lamellae. The stresses obtained analytically were compared to those obtained by a simplified finite element model to demonstrate the suitability of the methodology to the context of the intervertebral disc. The method was shown to be successful in predicting the general behavior of a simplified finite element model, and the results suggest that the theories are adequate. Important discrepancies were observed that could be explained by the simplifying assumptions used. Among these simplifications, we noted the absence of swelling pressure in the inner

AF, homogeneous material properties and constant fibers angle across the AF thickness, linear material properties, axisymmetry, neglecting fiber reorientation with deformation, and the use of circular arches to model the sagittal lamellae curvature during AF deformation. These limitations should be tackled in a way that allows understanding their respective effects. It is thus recommended to proceed in steps in improving the analytical model. In addition, flexion, torsion and combined loadings should be included for the model to gain practical interest.

### Acknowledgements

The authors thank the Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FRQNT), the Fonds de Recherche du Québec – Société et culture (FRQSC), the Fonds de recherche du Québec – Santé (FRQS) and the Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST) for funding this study.

### Nomenclature

$[A]$	Laminate extensional stiffness matrix
$[B]$	Laminate-coupling stiffness matrix
$[D]$	Laminate-bending stiffness matrix
$E_{eff,\varphi}$	Effective Young's modulus of a lamella in the longitudinal direction (MPa)
$E_{eff,\theta}$	Effective Young's modulus of a lamella in the circumferential direction (MPa)
$E_f$	Young's modulus in the fiber direction of an single lamella (MPa)
$E_{\varphi}^{sample}$	Longitudinal Young's modulus in experimental samples (MPa)
$E_r$	Young's modulus in the radial direction of a single lamella
$E_t$	Young's modulus in the transverse direction of a single lamella
$E_{\theta}^{sample}$	Circumferential Young's modulus in experimental samples (MPa)
$F_{comp}$	Axial compressive load (N)
$F_{LVE}$	Edge force acting at the lower vertebral endplate (N/mm)

$F_{UVE}$	Edge force acting at the upper vertebral endplate (N/mm)
$G_{ft}$	Shear modulus in the $f - t$ plane of a single lamella (MPa)
$G_{rf}$	Shear modulus in the $r - f$ plane of a single lamella (MPa)
$G_{tr}$	Shear modulus in the $t - r$ plane of a single lamella (MPa)
$G_{\theta\phi}^{sample}$	Shear modulus in the $\theta - \phi$ plane in experimental samples (MPa)
$I$	Number of iterations for large deformation analysis
$N_\phi$	Longitudinal membrane force (N/mm)
$N_\theta$	Circumferential membrane force (N/mm)
$[Q]$	Lamella stiffness matrix (MPa)
$[\bar{Q}]$	Lamella transformed stiffness matrix (MPa)
$R$	Major radius (mm)
$[S]$	Compliance matrix (MPa <sup>-1</sup> )
$[\bar{S}]$	Transformed compliance matrix (MPa <sup>-1</sup> )
$b$	Bulge of the anulus fibrosus (mm)
$i$	Equilibrium plane identification number
$j$	Lamella identification number
$m$	Equilibrium plane at the transverse plane of symmetry
$n$	Total number of lamellae in the anulus fibrosus
$n^{sample}$	Total number of lamellae in samples of documented experiment
$p_{NP}$	Intradiscal pressure (MPa)
$p_{out}$	Contact pressure acting outside of the anulus fibrosus (MPa)
$p_s$	Contact pressure between adjacent lamellae (MPa)
$r$	Radial axis on a membrane element
$r_h$	Horizontal radius on the medial surface of a membrane element (mm)
$r_\phi$	Longitudinal radius of a membrane element (mm)
$r_\theta$	Circumferential radius of a membrane element (mm)

$r_s$	Horizontal radius on the inside surface of a membrane element (mm)
$s$	Distance from the sample's medial surface (mm)
$t$	Thickness of a single lamella (mm)
$t^{sample}$	Total thickness of experimental samples (mm)
$z$	Spinal axis
$\beta_f$	Fiber orientation in the lamellae ( $^\circ$ )
$\delta$	Horizontal displacement (mm)
$\varepsilon$	Strain in a lamella (mm/mm)
$\lambda$	Slenderness ratio of a lamella
$\nu_{ft}$	Major Poisson's ratio of a single lamella
$\nu_{\varphi\theta}$	Poisson's ratio for deformation normal to $\varphi$ in direction of $\theta$
$\nu_{rf}$	Poisson's ratio for deformation normal to $r$ in direction of $f$
$\nu_{rt}$	Poisson's ratio for deformation normal to $r$ in direction of $t$
$\nu_{tf}$	Minor Poisson's ratio of a single lamella
$\nu_{tr}$	Poisson's ratio for deformation normal to $t$ in direction of $r$
$\nu_{\theta\varphi}$	Poisson's ratio for deformation normal to $\theta$ in direction of $\varphi$
$\varphi$	Longitudinal axis on a membrane element <i>or</i> Angular position of the membrane element relative to the $z$ axis (rad)
$\sigma$	Stress in a lamella (MPa)
$\tau_{ft}$	Shear stress in the $\theta - \varphi$ plane of a lamella (MPa)
$\theta$	Circumferential axis on a membrane element

### Superscripts

$[d]$	Parameter of the discontinuity solution
$[f]$	Parameter of the final solution

$[m]$       Parameter of the membrane solution

## **CHAPITRE 7**

### **DISCUSSION DES RÉSULTATS**

#### **7.1 Introduction**

Ce chapitre fait un retour sur les résultats essentiels de la thèse, afin de mettre en évidence le fil conducteur illustré à la figure 2.3. Cette vue d'ensemble de la thèse permet également l'interprétation supplémentaire de certains résultats.

#### **7.2 Résumé des articles de revue**

Le modèle analytique présenté au chapitre 3 a négligé l'effet des fibres de Sharpey afin de faciliter la validation de la théorie des membranes dans le contexte des grandes variations géométriques d'un réservoir multicouche faisant appel à des conditions de compatibilité des déplacements des lamelles. Ce modèle a été comparé à deux variantes d'un modèle numérique par éléments finis. La première variante du modèle a utilisé des conditions de couplage des noeuds des éléments pour gérer les déplacements des lamelles ; l'autre a utilisé des éléments de contact pour simuler l'interaction des lamelles. Le couplage des noeuds a été utilisé, car cette condition est similaire à celle utilisée dans le modèle analytique. Compte tenu de cette similitude, la comparaison des résultats devait correspondre avec un écart relatif faible. Il est toutefois important de mentionner que l'utilisation d'éléments de contact est jugée plus appropriée que le couplage des noeuds pour prédire le comportement des multiples lamelles de l'anneau fibreux. En effet, les éléments de contact représentent mieux le mécanisme naturel de transmission de la pression radiale d'une lamelle à une autre. L'hypothèse d'un contact sans friction est une simplification qui doit être étudiée afin de vérifier l'influence des fibres interlamellaires.

Le modèle analytique présenté au chapitre 4 visait à ajouter l'effet des fibres de Sharpey au modèle du premier article de revue. La théorie des poutres sur fondation élastique a été utilisée à cette fin, et certaines modifications ont dû être apportées à la méthode proposée dans le premier article de revue. En outre, une distribution de pression de contact a dû être imposée

afin d'éviter des problèmes liés à des effets de discontinuité non désirés. Aussi, la considération des effets des fibres de Sharpey à la suite du calcul de l'algorithme présenté dans le premier article était inadéquate. Il a fallu ajouter l'effet des fibres de Sharpey à celui de la pression intradiscale à chaque itération, de façon à faire évoluer la géométrie graduellement.

Le troisième article de revue a été écrit pour répondre à une recommandation du deuxième article, indiquant que la géométrie sagittale des lamelles devrait mieux représenter les conditions aux frontières imposées pour représenter l'effet des fibres de Sharpey et le support mutuel des lamelles près des plateaux vertébraux. À cet effet, les résultats de contraintes et de déplacements obtenus en utilisant un profil sagittal parabolique ont été comparés à ceux obtenus en utilisant un profil sagittal en arc de cercle. Les conditions aux frontières sont celles utilisées au deuxième article, incluant le contrôle des rotations aux points d'ancrage des lamelles.

Le quatrième article de revue, présenté au chapitre 6, a intégré l'anisotropie des lamelles et a pris en compte la compatibilité des déplacements de la solution globale, à la suite des observations issues du troisième article de revue. Le renflement du modèle analytique a été imposé identique à celui prédit par le modèle numérique par éléments finis afin de favoriser la comparaison des résultats de contraintes.

### **7.3 Récapitulation des principaux résultats de la thèse**

Les caractéristiques auxquelles sont confrontés les modèles numériques dans la littérature sont généralement la pression intradiscale générée par les efforts, le renflement du disque et sa déformation axiale. En fonction des structures et des tissus inclus dans les études, d'autres mesures expérimentales peuvent être utilisées pour la comparaison. Les modèles présentés dans les articles de revue ont nécessité des simplifications importantes vu la nature embryonnaire du modèle analytique. La méthodologie de cette étude a privilégié une démarche évolutive pour inclure certaines caractéristiques du disque intervertébral, de sorte que le développement de modèles comparatifs était requis. Comme l'étude souligne l'importance de la triangulation méthodologique et vise à la rendre accessible à l'étude du disque intervertébral, il était appro-



prié de confronter les résultats de l'étude à ceux de modèles numériques par éléments finis, mais aussi à des résultats d'études expérimentales. Comme il a été mentionné à la section 2.3, un modèle expérimental synthétique aurait pu être fabriqué selon le niveau de détails des modèles de cette étude, afin de compléter le troisième volet de la méthodologie. Il a toutefois été jugé préférable de confronter les résultats de l'étude aux données expérimentales de la littérature issues de spécimens biologiques, afin d'assurer une ligne directrice vers les résultats réels attendus. Le discernement est toutefois de mise dans la comparaison avec les résultats expérimentaux, afin d'éviter de condamner injustement le modèle dans sa forme simplifiée. D'une part, les résultats expérimentaux sont sujets à une grande variabilité, et la comparaison des résultats peut nécessiter l'extrapolation des données pour en faire correspondre les conditions de test. D'autre part, les résultats du modèle analytique peuvent diverger de ceux d'études expérimentales et numériques par éléments finis sophistiquées, sans signifier que le modèle doive être réfuté. Le modèle pourra être réfuté dès lors qu'on ne pourra expliquer les écarts ni proposer des améliorations compatibles avec les théories utilisées.

La comparaison avec certaines données expérimentales de la littérature a été faite dans chacun des articles, lorsque cela était possible et pertinent. Cependant, l'évolution des résultats tout au long de l'étude peut être difficile à interpréter sans un tableau récapitulatif. Le tableau 7.1 fait une récapitulation des résultats pour lesquels des données expérimentales sont disponibles dans la littérature. Une seule source est citée en référence pour chaque variable afin de simplifier l'analyse. De plus, certaines valeurs expérimentales ont été extrapolées pour faire correspondre la charge expérimentale à celle utilisée dans les modèles. L'extrapolation linéaire effectuée est une approximation, puisqu'une corrélation non linéaire par rapport à la charge a été décrite pour le renflement et la déformation axiale (Shirazi-Adl *et al.*, 1984).

La différence entre la charge appliquée et la pression attendue s'explique principalement par des données anthropométriques différentes entre les études, et par le fait que la perméabilité des lamelles a été ignorée. Une étude transitoire serait pertinente pour tenir compte de la hausse de pression dans les lamelles intérieures à la suite de la mise en charge. Il serait possible

Tableau 7.1 Comparaison des principaux résultats de l'étude avec les données expérimentales de la littérature

	Article 1	Article 2	Article 3	Article 4
Charge causant une pression de 1,94 MPa				
Littérature	2000 N <sup>(1)</sup>			
Analytique	1600 N	1600 N	1600 N	1600 N
(Écart)	(-20%)	(-20%)	(-20%)	(-20%)
Éléments finis	S.O. <sup>(2)</sup>	S.O. <sup>(2)</sup>	S.O. <sup>(2)</sup>	1700 N
(Écart)	S.O. <sup>(2)</sup>	S.O. <sup>(2)</sup>	S.O. <sup>(2)</sup>	(-15%)
Renflement				
Littérature	Entre 0,48 et 0,98 mm (pour 1600 N) <sup>(3)</sup>			
Analytique	4,16 mm	2,73 mm	1,93 mm	1,89 mm
(Écart minimal)	(324%)	(179%)	(97%)	(93%)
Éléments finis <sup>(4)</sup>	3,78 mm	1,48 mm	1,48 mm	1,89 mm
(Écart minimal)	(286%)	(51%)	(51%)	(93%)
Déformation axiale				
Littérature	Entre 7,7 et 15,8 % (pour 1000 N) <sup>(3)</sup>			
Analytique	7,9 %	5,5 %	5,8 % <sup>(5)</sup>	23,5 %
(Écart moyen)	(-32.8%)	(-53.2%)	(-50.6%)	(100%)
Éléments finis	7,3 %	7,8 %	7,8 %	11,3 %
(Écart moyen)	(-37.9%)	(-33.6%)	(-33.6%)	(-3.8%)

(1) Tirée de Adams *et al.* (1996)

(2) Le modèle utilise une pression seulement

(3) Extrapolation des données tirées de O'Connell *et al.* (2010)

(4) À la lamelle intérieure

(5) Profil parabolique

d'inclure cette hausse de pression dans l'étude quasi statique en imposant un profil de pression correspondant à l'état d'équilibre à la suite du fluage.

Les écarts importants observés sur le renflement, et la forte réduction de ces écarts aux différentes étapes de l'étude s'expliquent comme suit. D'abord, l'écart sur le renflement du modèle du premier article est dû au fait que les fibres de Sharpey ont été ignorées. L'inclusion des fibres de Sharpey, dans le deuxième article, a permis une nette amélioration, mais le résultat reste toutefois largement insatisfaisant. L'amélioration de la courbure sagittale, apportée dans le troisième article à l'aide d'une courbure parabolique, a permis de réduire l'écart considérablement. Les résultats du troisième article ont mené à constater que les déplacements finaux

obtenus avec la méthode utilisée n'étaient pas pris en charge correctement, de sorte que les lamelles extérieures s'éloignaient des lamelles intérieures. Le quatrième article a tenu compte de cette observation en imposant des déplacements égaux entre les lamelles au plan transversal de symétrie, en supposant que la compression radiale des lamelles était négligeable. Ce faisant, le renflement a été légèrement amélioré à la lamelle intérieure, mais fortement amélioré sur l'ensemble de l'anneau fibreux. Il est important de rappeler que, dans le quatrième article, le renflement du modèle analytique a été imposé identique à celui prédit par le modèle numérique. Il serait possible d'imposer un renflement concordant aux données expérimentales, ce qui devrait, logiquement, améliorer la réponse générale du modèle. Cependant, il reste plusieurs caractéristiques importantes à intégrer au modèle, et il est préférable de poursuivre la comparaison avec le modèle numérique jusqu'à ce que les deux modèles aient convergé vers les résultats expérimentaux de référence. Les résultats numériques par éléments finis indiquent un plus grand écart du modèle du quatrième article comparativement au troisième article, qui peut s'expliquer par le matériau plus souple défini pour le modèle anisotrope. Cette explication est directement en lien avec l'accroissement de la déformation axiale prédite en considérant l'anisotropie des lamelles. En ce qui concerne la compression radiale des lamelles, le modèle numérique par éléments finis a révélé qu'elle réduisait par près de 5% le renflement à la lamelle extérieure par rapport à la lamelle intérieure. Ce comportement n'est pas conforme aux observations expérimentales pour un DIV dégénéré (O'Connell *et al.*, 2010), mais reste plausible pour un DIV sain.

La déformation axiale obtenue est dans un ordre de grandeur acceptable sauf pour le modèle analytique du quatrième article, lequel l'a surestimée. La cause suspectée est l'inaptitude de la géométrie utilisée pour modéliser la courbure sagittale des lamelles. Son impact sur la déformation axiale n'a pas été décelé dans les articles précédents, possiblement à cause du matériau plus rigide dans les modèles isotropes. Le développement d'une méthode permettant de considérer un profil sagittal réaliste des lamelles déformées semble prioritaire dans la poursuite des travaux, puisque les contraintes et les déformations dépendent de la géométrie du modèle.

L'estimation du renflement influence directement la modélisation des lamelles à chaque itération, de sorte que la déformation axiale, les déplacements radiaux et les contraintes sont interdépendants et que l'amélioration du comportement d'une de ces variables peut améliorer le comportement des autres variables. Bien qu'il reste plusieurs améliorations à apporter avant que le modèle arrive à terme, des améliorations importantes ont été faites, et le tableau 7.1 permet d'expliquer l'évolution du modèle et la relation intime entre les paramètres expérimentaux utilisés pour la validation. Chaque amélioration est rendue possible grâce à une analyse fine du modèle simplifié. Sans ces modèles simplifiés, la compréhension du comportement des théories aurait pu être compromise. Ceci souligne l'importance de procéder par étapes pour développer le modèle analytique.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Les travaux de cette thèse par articles poursuivaient l'objectif principal d'explorer l'aptitude de théories existantes à prédire les contraintes et les déplacements en tout point d'un DIV sain soumis à un chargement quasi statique de compression uniaxiale. La théorie des membranes a été étudiée en vertu de son domaine conventionnel d'utilisation, puis a été soumise à un examen rigoureux des critères de modélisation auxquels elle doit répondre. Contrairement à la grande majorité des études numériques par éléments finis présentées dans la littérature, cette étude a utilisé des principes théoriques qui sont en accord avec l'observation selon laquelle une lamelle seule constitue l'unité structurale élémentaire de l'anneau fibreux (Holzapfel *et al.*, 2005). La faible épaisseur d'une lamelle et son aptitude à travailler essentiellement en tension correspond à la définition d'une membrane, et le mouvement relatif existant entre les lamelles correspond, selon les principes de la mécanique, à un ensemble de membranes concentriques plutôt qu'à un solide.

Le premier article de revue, présenté au chapitre 3, devait vérifier si la théorie des membranes, largement utilisée dans l'étude des réservoirs sous pression à paroi mince, était en mesure de représenter le comportement d'un anneau fibreux à plusieurs lamelles subissant de grandes déformations. Ces premiers développements analytiques ont demandé des hypothèses simplificatrices importantes. À ce stade préliminaire, l'ancrage des lamelles dans les plateaux vertébraux a été négligé, de sorte qu'il était difficile de valider adéquatement le modèle à l'aide des données expérimentales normalement utilisées pour la validation des modèles numériques. C'est pourquoi le modèle a été validé à l'aide d'un modèle comparatif d'éléments finis. Ainsi, les bases de la méthodologie prévue dans le cadre de cette thèse ont été appuyées, et se sont qualifiées pour les améliorations subséquentes.

Les deuxième et troisième articles de revue, présentés aux chapitres 4 et 5 respectivement, sont intimement liés à la poursuite du deuxième sous-objectif de l'étude, soit d'inclure les contraintes de discontinuité pour simuler l'ancrage des lamelles dans les plateaux vertébraux. À ce stade, le comportement général du modèle répondait aux observations expérimentales de déformation du disque intervertébral. Cependant, l'absence des propriétés anisotropes des

lamelles de l'anneau fibreux nuisait à la correspondance avec les données expérimentales. À l'instar de l'article 1, un modèle d'analyse par éléments finis simplifié a donc été utilisé pour permettre la validation du modèle théorique. La correspondance entre le modèle analytique et le modèle d'éléments finis était prometteuse dans le chapitre 4. Toutefois, le manque de conformité de la géométrie déformée a mené à la version améliorée présentée au chapitre 5.

Le quatrième article de revue, sujet du chapitre 6, a présenté le modèle qui complète le mandat du projet de recherche. La détermination des propriétés micromécaniques des lamelles de l'anneau fibreux à partir des données expérimentales documentées a nécessité l'utilisation de la théorie des matériaux composites pour décomposer les propriétés d'un échantillon de lamelles regroupées. Cette approche descendante a été nécessaire pour tenir compte du comportement des lamelles en traction biaxiale, car aucune donnée n'est actuellement disponible dans la littérature pour une lamelle unique dans cette condition de chargement. Au meilleur de nos connaissances, ces propriétés micromécaniques sont les premières à représenter le comportement élastique en traction biaxiale des lamelles uniques. Si des essais expérimentaux étaient réalisés pour établir des propriétés mécaniques correspondant à différentes valeurs de déformation d'un groupe de lamelles, la démarche proposée pourrait être utilisée pour définir des propriétés hyperélastiques en vue de les inclure dans la modélisation analytique. De plus, l'approche choisie permettra éventuellement d'approfondir l'étude des contraintes en cisaillement dans chaque lamelle, puisque celles-ci sont modélisées comme étant composées de fibres unidirectionnelles, tel qu'observé dans les études histologiques de la littérature.

Cette étude est justifiée par le besoin de rendre la triangulation méthodologique à la portée de la communauté scientifique oeuvrant dans l'étude du DIV. Ce modèle est, à notre connaissance, le plus évolué des modèles analytiques de la littérature actuelle. Certes, des simplifications limitent la portée actuelle de l'étude, si bien que la correspondance avec les données de la littérature n'est pas encore satisfaisante. Cependant, la discussion générale des résultats a montré une convergence des résultats vers les données expérimentales à chaque phase du développement du modèle. Le choix des concepts théoriques est fondé sur des principes fondamentaux qui assurent une base solide et qui permettront d'intégrer des caractéristiques qui rendront le

modèle de plus en plus intéressant d'un point de vue pratique. Il est primordial de comprendre l'influence de chaque paramètre et de chaque hypothèse simplificatrice avant d'ajouter des caractéristiques supplémentaires. Une complexification hâtive du modèle pourrait mener à des conclusions trompeuses et au rejet injustifié de l'approche.

Actuellement, certaines variables, comme les contraintes, ne peuvent être estimées que par la méthode des éléments finis. Le modèle analytique aura, à terme, une contribution significative en offrant un moyen supplémentaire de validation. La paramétrisation du modèle lui confère par ailleurs une polyvalence importante pour des études de sensibilité. Cette approche originale pourrait aussi servir dans d'autres domaines, par exemple dans l'étude des contraintes et des déformations des artères, qui sont constituées de plusieurs couches concentriques.





## **RECOMMANDATIONS**

Cette thèse a permis de supporter l'hypothèse selon laquelle les théories des réservoirs sous pression et des matériaux composites pouvaient être utilisées pour simuler le comportement d'un disque intervertébral. Cette hypothèse a été exposée uniquement à un cas de chargement en compression uniaxiale. De plus, la démarche proposée a utilisé plusieurs simplifications dans le but de mettre en évidence le rôle des paramètres fondamentaux du modèle. Les améliorations recommandées pour les travaux futurs sont décrites aux sections suivantes.

### **Courbure sagittale des lamelles**

Il serait prioritaire d'améliorer la courbure sagittale des lamelles en remplaçant l'arc de cercle ou la parabole par une fonction tenant entièrement compte des conditions aux frontières imposées aux plateaux vertébraux, afin de définir convenablement la courbure déformée des lamelles dans le plan sagittal. Un polynôme du quatrième ordre est recommandé à cet effet. Selon la position de la lamelle et de la charge, son utilisation pourrait impliquer une inversion de courbure, ce qui entraînerait une discontinuité qui devrait être traitée à l'aide de la théorie des poutres sur fondation élastique, mais imbriquée à même l'étape de la résolution des contraintes dues à la pression.

### **Distribution de pression dans l'anneau fibreux**

La distribution de pression estimée selon l'équation de la contrainte radiale dans un réservoir à paroi épaisse est une approximation qui ne tient pas compte du fluage. Or, le fluage est une étape transitoire au cours de laquelle la pression dans les lamelles internes de l'anneau fibreux augmente considérablement. Une solution de rechange à une étude poroélastique serait une étude quasi statique qui tienne compte de l'état d'équilibre suite à l'état transitoire, d'après une distribution de pression mesurée expérimentalement. Une telle distribution peut être établie d'après les données disponibles dans la littérature (Adams *et al.*, 1996).

### Propriétés hétérogènes et asymétrie

L'inclusion de propriétés hétérogènes, notamment l'épaisseur variable des lamelles et la variation radiale des propriétés des matériaux, est possible dans le modèle actuel sans apporter de modifications. Il serait utile d'étudier l'effet de ces variations sur la distribution des contraintes circonférentielles et longitudinales, de façon à vérifier si le modèle prédira des contraintes plus grandes aux lamelles extérieures qu'aux lamelles intérieures, tel qu'attendu (Noailly *et al.*, 2011). Pour étudier les variations dans la direction circonférentielle, il faudra au préalable mettre au point le modèle pour le rendre asymétrique. Une solution envisageable serait d'évaluer la solution dans un modèle axisymétrique, mais en utilisant des paramètres géométriques et des propriétés correspondant à un endroit précis le long de la circonférence de l'anneau fibreux asymétrique, tel que proposé par Prud'Homme (2008). L'angle réel entre les plateaux vertébraux devrait aussi être pris en compte.

### Matériau hyperélastique

Les propriétés hyperélastiques des lamelles peuvent avoir une influence importante sur la réponse du disque. La méthode itérative utilisée pour tenir compte des grandes déformations et des grands déplacements permettrait de mettre à jour les propriétés des tissus en différents points selon l'état de déformation. Le critère de convergence définissant le nombre d'itérations pourrait devoir être revu si cette approche était utilisée. Cette adaptation du modèle suppose que des propriétés micromécaniques décrivant le comportement hyperélastique des lamelles soient disponibles. Des études expérimentales pourraient être requises à ce sujet.

### Chargements complexes

Un chargement en compression uniaxiale n'est pas critique pour la formation d'une hernie discale. Les besoins en modélisation concernent maintenant beaucoup plus des chargements en flexion, en torsion et des combinaisons de ces derniers avec la compression uniaxiale. Il est impératif que le modèle soit adapté pour étudier ces chargements. La méthode proposée serait

de définir une géométrie précontrainte basée sur la posture, puis de superposer ces contraintes à celles provenant d'une compression uniaxiale agissant sur cette posture en particulier.

### **Réorientation des fibres de collagène dans l'anneau fibreux**

En compression, le cisaillement dans les lamelles cause une réorientation des fibres de collagène vers la direction circonférentielle pendant la déformation, ce qui influence la réponse du disque intervertébral. La réorientation des fibres est fonction des contraintes de cisaillement dans les lamelles et peut être incluse dans la modélisation analytique à l'aide de la méthode itérative déjà utilisée pour les grandes déformations.

### **Flexibilité des plateaux vertébraux**

Dans cette étude, les plateaux vertébraux ont été considérés rigides. Par contre, ils subissent une flexion lors du chargement, ce qui peut influencer la déformation axiale de l'anneau fibreux. La flexibilité des plateaux vertébraux pourrait être prise en compte à l'aide de la théorie des plaques, en s'assurant de la compatibilité des déplacements et des rotations à la jonction des plateaux et des lamelles.

### **Critère de défaillance**

Le modèle de cette étude s'est limité à évaluer les contraintes dans l'anneau fibreux. Une fois les recommandations précédentes apportées, il serait pertinent de proposer un critère de défaillance permettant de prédire la rupture de l'anneau fibreux. De plus, des effets localisés peuvent être causés par des perturbations locales de la microstructure de l'anneau fibreux, et celles-ci n'ont pas été incluses dans ces travaux. Les théories de la mécanique de la rupture pourraient être évaluées afin de vérifier leur potentiel pour modéliser les discontinuités structurales et étudier leur effet sur la rupture de l'anneau fibreux.

### **Rôle des ligaments**

Le rôle des ligaments dans la résistance mécanique de l'anneau fibreux devrait éventuellement être considéré, en particulier le ligament longitudinal postérieur.

### **Modélisation par la méthode des éléments finis**

Une dernière recommandation à formuler à la suite de cette étude serait de développer un modèle sophistiqué à l'aide de la méthode des éléments finis, ayant un niveau de détails similaire à ceux de la littérature, mais utilisant des coques au lieu d'un solide pour modéliser l'anneau fibreux. Une comparaison des résultats avec ceux de la littérature permettrait de vérifier l'impact de cette approche sur le comportement simulé du DIV. De plus, cette approche permettrait d'étudier l'interaction entre les lamelles d'une façon micromécanique plutôt que par l'ajustement des constantes d'un matériau constitutif, et pourrait associer à chaque lamelle sa structure composite unidirectionnelle, ce que ne font pas les modèles discutés dans la revue de la littérature.

## ANNEXE I

### LISTE DES PUBLICATIONS EN LIEN AVEC LA THÈSE

#### Articles publiés dans des revues scientifiques avec comité de lecture

- **Demers, S.,** A.-H. Bouzid, et S. Nadeau. 2013. « On the modeling of an intervertebral disc using a novel large deformation multi-shell approach ». *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 135, n° 5, p. 051003-1–051003-8.

#### Articles soumis dans des revues scientifiques avec comité de lecture

- **Demers, S.,** S. Nadeau, et A.-H. Bouzid. 2015. « Anisotropic multi-shell analytical modeling of an intervertebral disc subjected to axial compression ». En révision (Octobre), *Journal of Biomechanical Engineering*. (Confirmation de soumission : BIO-15-1241)
- **Demers, S.,** S. Nadeau, et A.-H. Bouzid. 2015. « Analytical evaluation of stresses and displacements of an intervertebral disc ». Soumis (Octobre), *Journal of Applied Mechanics*. (Confirmation de soumission : JAM-15-1583)
- **Demers, S.,** A.-H. Bouzid et S. Nadeau. 2015. « Effect of sharpey's fibers on the stress distribution in the annulus fibrosus of an intervertebral disc subjected to compression ». Soumis (Octobre), *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. (Confirmation de soumission : CNM-Oct-15-0208)

#### Conférences avec comité de lecture

- **Demers, S.,** A.-H. Bouzid, et S. Nadeau. 2013. « Analytical and finite element stress analysis of an intervertebral disc subjected to axial compression ». In *CIRI 2013, 3–5 juillet, Reims, France*, p. 1-16.

- **Demers, S.,** S. Nadeau, et A.-H. Bouzid. 2013 « On the use of multishell theory to model herniated discs ». In *Gesellschaft für Arbeitswissenschaft (GfA)*, 27 février au 1<sup>er</sup> mars, Krefeld, Allemagne, p. 371-374.
- **Demers, S.,** A.-H. Bouzid and S. Nadeau. 2012. « Analytical and finite element multi-shell modelling of an intervertebral disc ». In *2012 ASME Pressure Vessels and Piping Conference (PVP2012)*, 15-19 juillet, Toronto, Canada, p. 1-12. (Lauréat d'un prix).
- **Demers, S.,** A.-H. Bouzid, et S. Nadeau. 2012. « Stress analysis of the intervertebral disc using a developed multi-shell model ». p. 1-7. In *Twelfth Pan American Congress of Applied Mechanics (Proceedings of PACAM XII)*, 2-6 janvier, Port of Spain, Trinidad, p. 1-7.

#### Présentations par affiche

- **Demers, S.,** S. Nadeau and A.-H. Bouzid. 26-29 juin 2013. « Analytical anisotropic multi-shell model of a simplified intervertebral disc subjected to axial compression ». In *ASME 2013 Summer Bioengineering Conference (SBC 2013)*, 26-29 juin, Sunriver, Oregon, p. 1-2
- **Demers, S.,** 2012. « Modélisation en biomécanique : comment les réservoirs sous pression peuvent-ils simuler un disque intervertébral ? ». Concours de vulgarisation scientifique, École de technologie supérieure. Montréal, Québec. (Lauréat d'un prix).

## ANNEXE II

### MAILLAGE, CHARGEMENT ET CONDITIONS AUX FRONTIÈRES DES MODÈLES NUMÉRIQUES PAR ÉLÉMENTS FINIS

Les figures II-1 à II-3 montrent le maillage, le chargement et les conditions aux frontières utilisés pour l'exécution du modèle numérique par éléments finis de chaque article de revue.

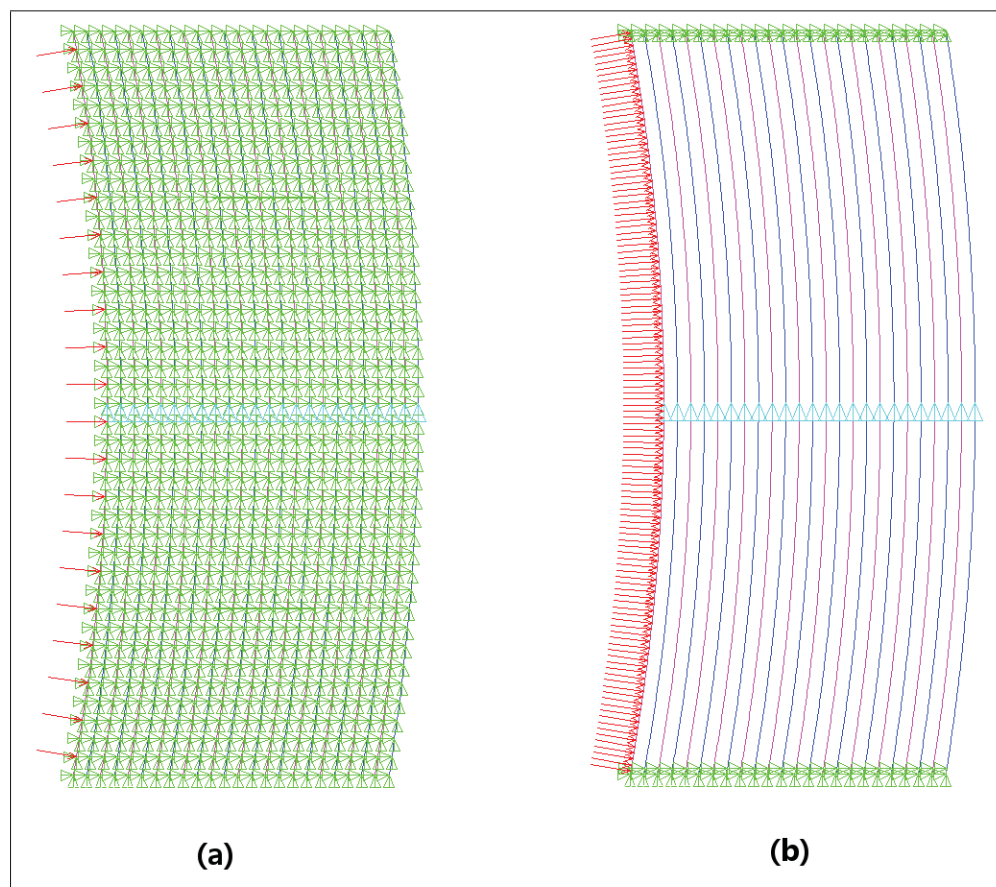


Figure-A II-1 Maillage, chargement et conditions aux frontières du modèle numérique par éléments finis utilisé dans le premier article de revue (a) Modèle avec couplage des noeuds. Le déplacement vertical des noeuds au plan transversal de symétrie est bloqué et tous les autres noeuds sont couplés à l'horizontale et à la verticale. (b) Modèle avec éléments de contact. Le déplacement vertical des noeuds au plan transversal de symétrie est bloqué et les noeuds aux plateaux vertébraux sont couplés à l'horizontale et à la verticale. Les flèches indiquent la pression intradiscale agissant à l'intérieur de l'anneau fibreux.

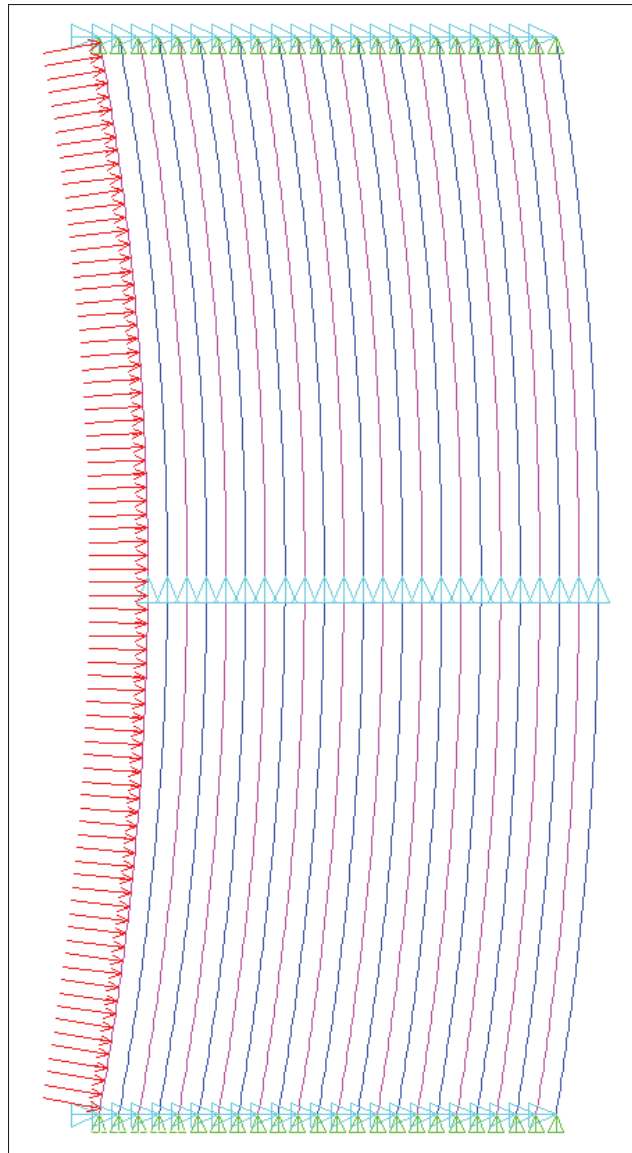


Figure-A II-2 Maillage, chargement et conditions aux frontières du modèle numérique par éléments finis utilisé dans les deuxième et troisième articles de revue. Le déplacement vertical des noeuds au plan transversal de symétrie est bloqué. Le déplacement horizontal des noeuds aux plateaux vertébraux est bloqué et le déplacement vertical en ces noeuds est couplé. Les flèches indiquent la pression intradiscale agissant à l'intérieur de l'anneau fibreux.



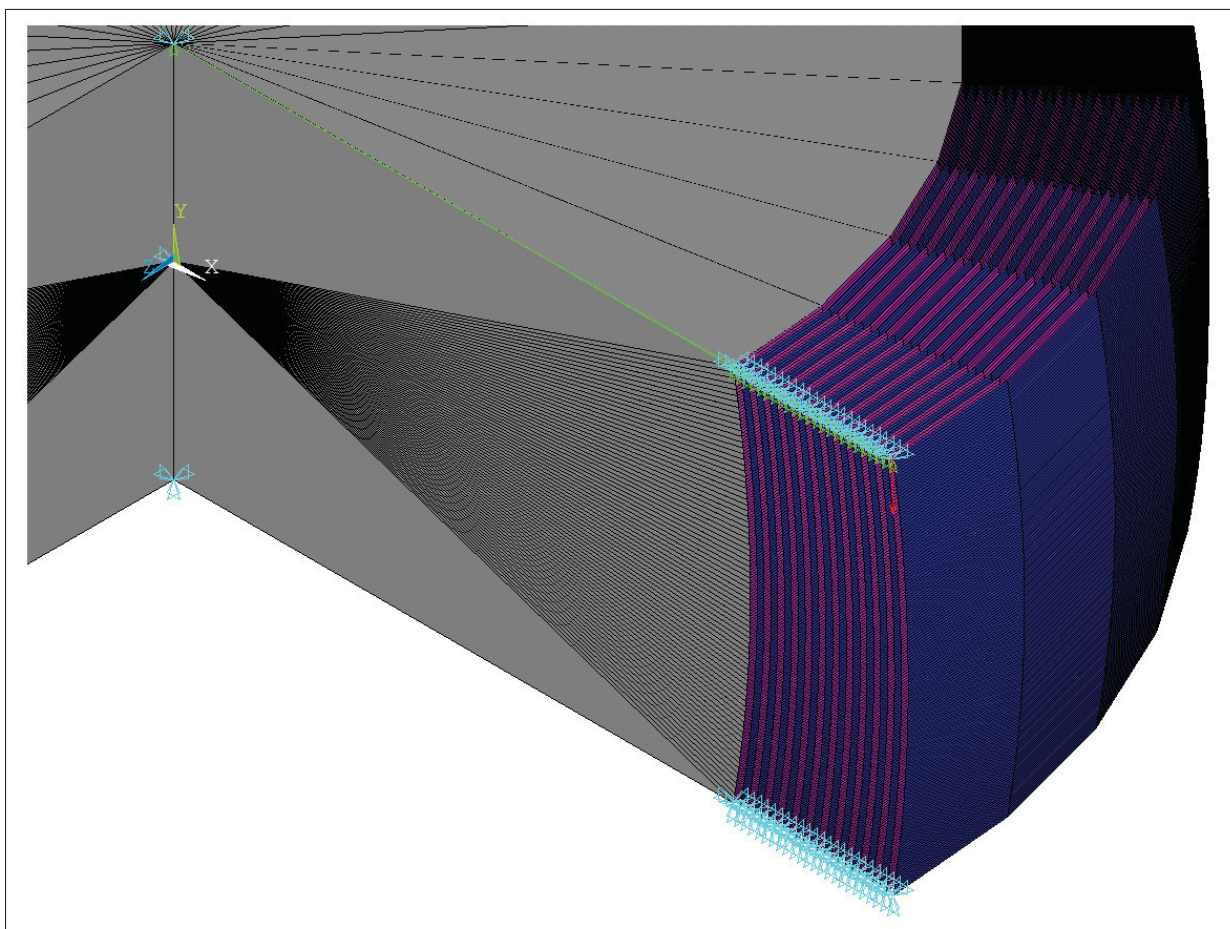


Figure-A II-3 Maillage, chargement et conditions aux frontières du modèle numérique par éléments finis utilisé dans le quatrième article de revue. La vue montre une expansion sur 270° du modèle axisymétrique. Les déplacements à l'horizontale et à la verticale sont bloqués aux noeuds du plateau vertébral inférieur. Les déplacements à l'horizontale sont bloqués aux noeuds du plateau vertébral supérieur, alors que leur déplacement vertical est couplé. La force agissant sur le plateau vertébral supérieur est indiquée par la flèche au noeud supérieur de la lamelle extérieure.



## ANNEXE III

### QUESTION D'ÉPISTÉMOLOGIE

Les travaux de cette thèse ont soulevé une question très importante dans la communauté scientifique : *Pourquoi développer un modèle analytique simplifié du disque intervertébral alors que les modèles d'analyse par éléments finis de pointe sont déjà beaucoup plus avancés ?* Cette question mettait en doute la pertinence de l'approche analytique pour l'étude du disque intervertébral. Bien que le développement d'un modèle analytique ait été justifié dans le corps de cette thèse, certains arguments ont été colligés dans cette annexe afin d'offrir des éléments de réponse supplémentaires. Ces arguments sont présentés dans leur langue originale de communication, soit l'anglais.

#### **Arguments**

Finite element modeling (FEM) is a powerful tool that is used to treat complex problems such as stress and deformation analysis in an intervertebral disc subjected to different loadings. The level of complexity and sophistication that can be reached with finite element modeling is much greater than analytical modeling. However, the recurrent question that keeps coming with FEM is that one cannot guaranty that the model has absolutely no errors unless validated by another approach. Bearing in mind that experimental validation in this case is rather difficult to achieve from both strain measurement technology availability and accessibility standpoints, we are left with the need of finding another mean to validate finite element models. Therefore, the analytical tool is a very attractive solution. As the first step towards achieving this complex task, the analytical model is simplified initially but will gradually incorporate other characteristics. Analytical modeling improvement is the key principle in this research plan.

The methodology that was set forth in this research plan includes the use of methodological triangulation (Thémis, 2003; Adami et Kiger, 2005). As shown in figure III-1, the data required for modeling is gathered from the published experimental works. This data is used to construct the analytical and finite element models. These models are then compared to each other and

finally validated with the limited experimental data available in the literature. The analytical and finite element models presented in the paper yield similar results. This gives confidence that the models capture the same behavior (Thémis, 2003).

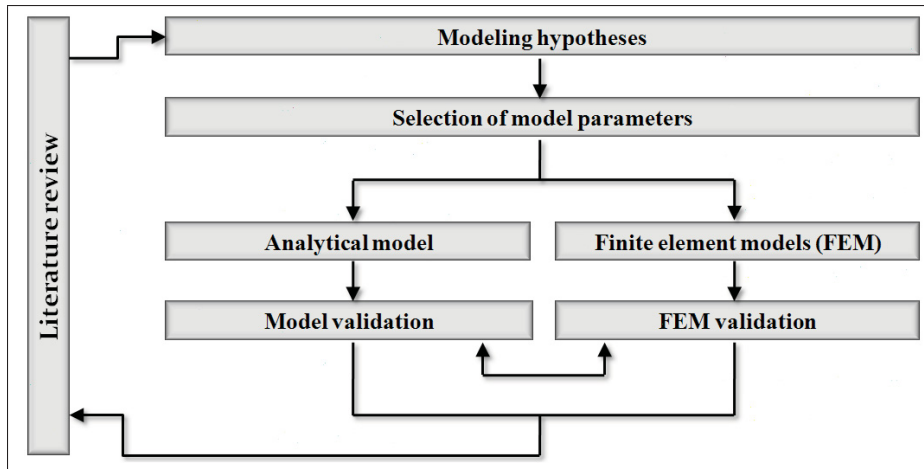


Figure-A III-1 Research methodology

Although observations (here the results) can corroborate the hypothesis, no theory, according to Popper (1984), can be empirically verified. He stated that a demarcation criterion must be founded on falsifiability rather than verifiability, where verifiability refers to seeking the truth. Falsifiability means that a system being part of empiric science should be subjected to experimental refutability, given accepted basic statements, before it is rejected. Popper further states that accepted basic statements are the basis of hypothesis corroboration. In studying the intervertebral discs, "accepted basic statements" are difficult to formulate because experiments have, so far, been conducted on a very limited number of individuals or specimens, owing to costly, ethically-related and time consuming manipulations. Consequently, the models (either analytical, numerical, or experimental), can only be compared to currently accepted basic statements. This adds to the necessity of methodological triangulation. Different approaches that lead to similar conclusions strengthens those basic statements. According to Flick (1992, p. 179), "We should combine theories and methods carefully and purposefully with the intention of adding breadth or depth to our analysis but not for the purpose of pursuing 'objective'

truth". This citation agrees well with Popper's demarcation criterion and asserts the benefits of methodological triangulation. In addition, some approaches can reveal interesting information that others are less prone to show. This includes identifying missing data in the literature. For example, encompassing the statically indeterminate nature of the multi-shell analytical model led the authors to attempt considering the mutual interactions of the lamellae, which is a relatively new subject in the literature (Rodrigues *et al.*, 2012; Gregory *et al.*, 2012).

Of course, the analytical model as it is presented in this paper needs improvements to reach the level of refinement that may be achieved with finite element models. This explains why it cannot yet be compared to a wide range of "accepted basic statements". However, the model has been compared to as much data that possibly could at this point and has shown to be irrefutable.

The aim of the analytical method is not to compete with the finite element method but to support the finite element models or to help improve them. The authors think that FE models will progress even more effectively if they are confronted to alternative methods. Undoubtedly, whenever possible, the analytical approach should be given consideration, as it represents an efficient, novel and promising way of complementing other methods to study the mechanical behavior of structures, including those of human.



## ANNEXE IV

### PROGRAMMES MATLAB POUR L'ARTICLE 4

Une suite de programmes et de fonctions Matlab a été écrite pour la résolution analytique des problèmes posés aux articles 1 à 4. Des options sont demandées à l'utilisateur au lancement du programme de démarrage pour appeler les programmes et fonctions appropriées à un objectif spécifique. Ces options dictent le comportement du modèle, et gèrent les conditions booléennes nécessaires aux itérations permettant de considérer les grandes variations géométriques. Dans cette annexe, seules les portions de code pertinentes à la solution analytique du quatrième article sont présentées, afin d'alléger le contenu. Pour la solution du quatrième article, les options suivantes sont requises :

- $discontinuites = 0$  ;
- $grand\_dep = 0$  ;
- $anisotrope = 0$  ;
- $nonlineaire = n$  ;
- $nb\_subload = 42$  ;
- $nb\_it\_grand\_dep = 0$  ;
- $profil = 1$  ;
- $decalage\_profil = 1$  ;
- $option\_pression = 1$  ;
- $compression\_radiale = 1$  ;
- $bloquer\_rotations = 2$

Aucune information ou action supplémentaire n'est requise de la part de l'utilisateur, exception faite du traitement des résultats, pour lequel des programmes indépendants ont été écrits pour tracer les graphiques propres à chaque article.

## Programme de démarrage

```

%% Programme de démarrage de l'algorithme pour le calcul des contraintes dans le disque ...
    intervertebral axisymetrique multicouche soumis a une force de compression uniaxiale.

% Projet de doctorat, Ecole de technologie superieure
% Departement de genie mecanique
% Copyright Sebastien Demers, ing.

% Representation du noyau pulpeux (NP) par une geometrie axisymetrique :
% Coque avec gonflement lateral

%% -----
% ----- Initialisation -----

clear all
close all
clc
format short

% Demarrage du chronometre (en secondes)

tstart = tic;

fig = 0;           % Numero de figure initiale
m = 5;            % Nombre de points entre le pv superieur et le plan transversal de ...
                  % symetrie
compteur = 0;      % Compte qui s'incrimente a chaque fois que la solution membrane est ...
                  % calculee (lors des iterations des grands déplacements et des boucles de calculs des ...
                  % subloads)
nbpt = 2*m-1;      % Nombre de points entre les pv superieur et inferieur
it_grand_dep = 0;  % Initialisation du compteur des iterations pour les grands ...
                  % déplacements
nb_it_grand_dep = 0; % Necessary pour les etudes sans "nb_it_grand_dep" defini par l' ...
                  % utilisateur
nb_subload = 1;    % Necessary pour les etudes sans "nb_subload" defini par l'utilisateur
compteur_membrane = 0; % Initialisation du compteur des solutions membranes
compteur_subload = 0; % Initialisation du compteur des solutions de sous-charges pour ...
                  % la solution de discontinuite incluant les grandes deformations
it_nonlin = 0;     % Initialisation du compteur pour savoir si le calcul ...
                  % concerne la solution lineaire ou non-lineaire (la solution non-lineaire necessite une ...
                  % iteration)

%% -----

```



```

% ----- Declaration des variables -----

syms o O n N L Win

%% -----
% ----- Identification du systeme d'exploitation -----

% L'identification du systeme d'exploitation est (peut-etre) necessaire pour naviguer
% dans les systemes de fichiers: Linux utilise / et Windows utilise \
disp(' ')
OS = input('Utilisez -vous Linux ou Windows? (L=Linux/_Win=Windows): ','s');
disp(' ')

%% -----
% ----- Choix des solutions -----

% Decommenter pour l'etude de convergence, et ajuster facteur_convergence
% dans le programme SOLUTION_MEMBRANE.m
% convergence_membrane = 1;
% it_convergence = 1;
% nb_subload = 1;
% discontinuites = n;
% grand_dep = o;
% anisotrope = o;
% nonlineaire = n;
% nb_it_grand_dep = 0;
convergence_membrane = 0;

if convergence_membrane ~=1
choix_possible = 0; % Pour rester dans la boucle tant que la combinaison des choix n'est ...
    pas prise en charge
while choix_possible == 0
    choix_possible = 1;
    disp('Liste_de_combinaisons_des_options_d''analyse')
    disp('-----')
    disp('1)_Solution_membrane_isotrope_lineaire_sans_tenir_compte_des_grands_deplacements. ...
        ')
    %disp('2) Solution membrane isotrope non-lineaire sans tenir compte des grands ...
        deplacements.')
    disp('3)_Solution_membrane_anisotrope_lineaire_sans_tenir_compte_des_grands_ ...
        deplacements.')
    %disp('4) Solution membrane anisotrope non-lineaire sans tenir compte des grands ...
        deplacements.')

```

```

disp('5)_Solution_membrane_isotrope_lineaire_en_tenant_compte_des_grands_deplacements.' ...
)
%disp('6) Solution membrane isotrope non-lineaire en tenant compte des grands ...
    _deplacements.')
```

```

disp('7)_Solution_membrane_anisotrope_lineaire_en_tenant_compte_des_grands_deplacements ...
.')
```

```

%disp('8) Solution membrane anisotrope non-lineaire en tenant compte des grands ...
    _deplacements.')
```

```

disp('9)_Solution_isotrope_lineaire_incluant_l''analyse_des_discontinuites_sans_tenir ...
    _compte_des_grands_deplacements.')
```

```

%disp('10) Solution isotrope non-lineaire incluant l''analyse des discontinuites sans ...
    _tenir_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

%disp('11) Solution anisotrope lineaire incluant l''analyse des discontinuites sans ...
    _tenir_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

%disp('12) Solution anisotrope non-lineaire incluant l''analyse des discontinuites sans ...
    _tenir_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

disp('13)_Solution_isotrope_lineaire_incluant_l''analyse_des_discontinuites_en_tenant ...
    _compte_des_grands_deplacements.')
```

```

%disp('14) Solution isotrope non-lineaire incluant l''analyse des discontinuites en ...
    _tenant_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

disp('15)_Solution_anisotrope_lineaire_incluant_l''analyse_des_discontinuites_(avec ...
    _materiau_isotrope)_en_tenant_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

%disp('16) Solution anisotrope non-lineaire incluant l''analyse des
    _discontinuites_en_tenant_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

disp('_')
```

```

choix = input('Entrez_votre_choix_de_solution:_');
disp('_')
```

```

if choix == 1
    discontinuites = n;
    grand_dep = n;
    anisotrope = n;
    nonlineaire = n;
    disp('Vous_avez_choisi_d''evaluer_la_solution_membrane_isotrope_lineaire_sans_tenir ...
        _compte_des_grands_deplacements.')
```

```

    disp('_')
```

```

elseif choix == 3
    discontinuites = n;
    grand_dep = n;
    anisotrope = 0;
    nonlineaire = n;
    disp('Vous_avez_choisi_d''evaluer_la_solution_membrane_anisotrope_lineaire_sans ...
        _tenir_compte_des_grands_deplacements.')
```

```

    disp('_')
```

```

elseif choix == 5
```

```

discontinuites = n;
grand_dep = 0;
anisotrope = n;
nonlineaire = n;
disp('Vous_avez_choisi_d''evaluer_la_solution_membrane_isotrope_lineaire_en_tenant_ ...
      compte_des_grands_deplacements.')
```

**disp**('\_')

```

nb_it_grand_dep = input('Combien_d''iterations_souhaitez-vous_faire_sur_la_solution_ ...
      _membrane_pour_tenir_compte_des_grands_deplacements?_');
disp('_')
```

**elseif** choix == 7

```

discontinuites = n;
grand_dep = 0;
anisotrope = 0;
nonlineaire = n;
disp('Vous_avez_choisi_d''evaluer_la_solution_membrane_anisotrope_lineaire_en_ ...
      tenant_compte_des_grands_deplacements.')
```

**disp**('\_')

```

nb_it_grand_dep = input('Combien_d''iterations_souhaitez-vous_faire_sur_la_solution_ ...
      _membrane_pour_tenir_compte_des_grands_deplacements?_');
disp('_')
```

**elseif** choix == 9

```

discontinuites = 0;
grand_dep = n;
anisotrope = n;
nonlineaire = n;
disp('Vous_avez_choisi_de_considerer_les_effets_de_discontinuite_sans_tenir_compte_ ...
      des_grands_deplacements.')
```

**disp**('\_')

**elseif** choix == 13

```

discontinuites = 0;
grand_dep = 0;
anisotrope = n;
nonlineaire = n;
disp('Vous_avez_choisi_de_considerer_les_effets_de_discontinuite_en_tenant_compte_ ...
      des_grands_deplacements.')
```

**disp**('La\_prise\_en\_charge\_des\_grands\_deplacements\_est\_realisee\_par\_une\_superposition\_ ...
 \_de\_cas\_utilisant\_une\_subdivision\_de\_la\_charge\_totale.\_')

```

nb_subload = 0;
while nb_subload < 1
    nb_subload = input('Combien_de_subdivisions_de_la_charge_totale_souhaitez-vous_ ...
        utiliser?_');
    disp('_')
    if nb_subload < 1
```

```

        disp('Le_nombre_de_subdivisions_doit_etre_un_entier_positif.')
```

nb\_subload = **input**('Combien\_de\_subdivisions\_de\_la\_charge\_totale\_souhaitez-vous\_utiliser?');  
 disp(' ');

**end**

**end**

**disp**('Il\_est\_possible\_de\_faire\_converger\_la\_solution\_membrane\_d''une\_sous-charge\_a\_ ...  
 l''aide\_d''un\_certain\_nombre\_d''iterations\_avant\_de\_passer\_au\_calcul\_de\_la\_ ...  
 prochaine\_sous-charge.')

**disp**('Cela\_peut\_etre\_utile\_si\_le\_nombre\_de\_subdivisions\_de\_la\_charge\_totale\_n''est\_ ...  
 pas\_suffisant\_pour\_assurer\_de\_petits\_deplacements\_pour\_chaque\_cas\_superpose.')

**disp**('Toutefois\_,\_un\_nombre\_d''iterations\_différent\_de\_0\_n''est\_pas\_recommande.')

nb\_it\_grand\_dep = **input**('Combien\_d''iterations\_souhaitez-vous\_(0\_est\_recommande)?\_ ...  
 ');

**disp**(' ');

**elseif** choix == 15

discontinuites = 0;  
 grand\_dep = 0;  
 anisotrope = 0;  
 nonlineaire = n;

**disp**('Vous\_avez\_choisi\_de\_considerer\_l''anisotropie\_avec\_les\_effets\_de\_ ...  
 discontinuite\_(matériau\_isotrope)\_en\_tenant\_compte\_des\_grands\_deplacements.')

**disp**('La\_prise\_en\_charge\_des\_grands\_deplacements\_est\_realisee\_par\_une\_superposition\_ ...  
 \_de\_cas\_utilisant\_une\_subdivision\_de\_la\_charge\_totale\_.')

nb\_subload = 0;

**while** nb\_subload < 1

nb\_subload = **input**('Combien\_de\_subdivisions\_de\_la\_charge\_totale\_souhaitez-vous\_ ...  
 utiliser?');  
**disp**(' ');

**if** nb\_subload < 1

**disp**('Le\_nombre\_de\_subdivisions\_doit\_etre\_un\_entier\_positif.')

nb\_subload = **input**('Combien\_de\_subdivisions\_de\_la\_charge\_totale\_souhaitez-vous\_ ...  
 utiliser?');  
**disp**(' ');

**end**

**end**

**disp**('Il\_est\_possible\_de\_faire\_converger\_la\_solution\_membrane\_d''une\_sous-charge\_a\_ ...  
 l''aide\_d''un\_certain\_nombre\_d''iterations\_avant\_de\_passer\_au\_calcul\_de\_la\_ ...  
 prochaine\_sous-charge.')

**disp**('Cela\_peut\_etre\_utile\_si\_le\_nombre\_de\_subdivisions\_de\_la\_charge\_totale\_n''est\_ ...  
 pas\_suffisant\_pour\_assurer\_de\_petits\_deplacements\_pour\_chaque\_cas\_superpose.')

**disp**('Toutefois\_,\_un\_nombre\_d''iterations\_différent\_de\_0\_n''est\_pas\_recommande.')

nb\_it\_grand\_dep = **input**('Combien\_d''iterations\_souhaitez-vous\_(0\_est\_recommande)?\_ ...  
 ');

```

        disp(' ')
    else
        choix_possible = 0;
        disp('La selection n''est pas disponible. Veuillez refaire votre selection parmi la ...
            _liste affichee. ');
        disp(' ')
        clc          % Efface l'affichage
    end
end
end

% Selection du profil sagittal (arc de cercle, parabole ou autre)
disp(' Choisissez le profil sagittal du disque parmi les suivants: ');
disp(' _1_ Profil en arc de cercle ')
disp(' _2_ Profil parabolique ')
disp(' _4_ Profil d''ordre 4 ')
profil = input(' Selection: ');
disp(' ')

% Selection du type de decalage des lamelles
disp(' Le decalage des lamelles est-il normal (1) ou directionnel (2)? ');
disp(' Le decalage directionnel reproduit le meme profil pour chaque lamelle. ');
decalage_profil = input(' Selection: ');
if decalage_profil == 1
    disp(' Vous avez choisi un decalage normal des lamelles. ')
elseif decalage_profil == 2
    disp(' Vous avez choisi un decalage directionnel des lamelles. ')
else
    disp(' Vous n''avez pas entre un choix valide. Un decalage directionnel est utilise par ...
        default. ')
    decalage_profil = 1;
end
disp(' ')

% Choix d'imposer ou non une distribution des pressions de contact
disp(' Choisissez une option pour les pressions de contact: ')
disp(' _1_ Imposer une distribution de pression de contact (Lame); ')
disp(' _2_ Resoudre les pressions de contact en tant qu''inconnues. ')
option_pression = input(' Selection: ');
if option_pression == 1
    disp(' Vous avez choisi d''imposer une distribution de pression de contact. ')
elseif option_pression == 2
    disp(' Vous avez choisi de traiter les pressions de contact en tant qu''inconnues. ')
else

```

```

    disp('Vous_n''avez_pas_entre_un_choix_valide._La_distribution_de_pression_sera_imposee_ ...
        par_default.')
```

option\_pression = 1;

```

end
disp('_')
```

*% Choix de tenir compte ou non de la compression radiale des lamelles*

```

disp('Choisissez_une_option_pour_la_compression_radiale_des_lamelles:')
```

```

disp('___1) Negliger_la_compression_radiale_des_lamelles;')
```

```

disp('___2) Tenir_compte_de_la_compression_radiale_des_lamelles.')
```

```

compression_radiale = input('Selection:_');
```

```

if compression_radiale == 1
    disp('Vous_avez_choisi_d''ignorer_la_compression_radiale_des_lamelles.')
```

```
elseif compression_radiale == 2
    disp('Vous_avez_choisi_de_tenir_compte_de_la_compression_radiale_des_lamelles.')
```

```
else
    disp('Vous_n''avez_pas_entre_un_choix_valide._La_compression_radiale_des_lamelles_sera_ ...
        ignoree_par_default.')
```

```

    compression_radiale = 1;
end
disp('_')
```

*% Condition pour verifier l'effet de la condition frontiere en rotation a la*

```

if discontinuities == 0
    % Choix de restreindre ou non les rotations aux plateaux vertebraux
    disp('Choisissez_une_option_pour_restreindre_ou_non_les_rotations_aux_plateaux_ ...
        vertebraux:')
```

```

    disp('___1) Restreindre_la_rotation_de_la_premiere_lamelle,_laisser_libre_la_derniere_ ...
        lamelle,_et_interpoler_la_rotation_des_lamelles_intermediraires;')
```

```

    disp('___2) Ne_pas_restreindre_la_rotation_des_lamelles_aux_plateaux_vertebraux.')
```

```

    bloquer_rotations = input('Selection:_');
```

```

    if bloquer_rotations == 1
        disp('Vous_avez_choisi_de_restreindre_les_rotations_des_lamelles_aux_plateaux_ ...
            vertebraux.')
```

```
    elseif bloquer_rotations == 2
        disp('Vous_avez_choisi_de_ne_pas_restreindre_les_rotations_des_lamelles_aux_ ...
            plateaux_vertebraux.')
```

```

    else
        disp('Vous_n''avez_pas_entre_un_choix_valide._La_rotation_des_lamelle_sera_ ...
            restreinte_par_default.')
```

```

        bloquer_rotations = 1;
    end
    disp('_')
```

```


```

%premiere lamelle
if bloquer_rotations == 1
    disp('Entrez un ratio d''angle de rotation entre la premiere lamelle et la derniere ...
        _lamelle_(0=_pas_de_rotation_a_la_premiere_lamelle):')
    ratio_rotation_pvs_lamelle_1 = input('Selection_:');
    ratio_rotation_pvi_lamelle_1 = ratio_rotation_pvs_lamelle_1;
    disp('_')
end
end

%% -----
% ----- Parametres de geometrie initiale -----

rnp = 16.2;          % Rayon du NP (mm)
g = 0.5;             % Renglement initial (mm)
M_t = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, ...
        0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2];    % epaisseur de chaque couche (mm)
mn_t = size(M_t);
nb_couche = mn_t(1,2);
% Construction de la matrice des orientations de fibres
beta = 30*pi()/180;          % Orientation des fibres de collagene par ...
    rapport a l'horizontal
M_beta = zeros(1,nb_couche);
sens = 1;
for j=1:1:nb_couche
    M_beta(1,j) = -beta*sens;
    sens = sens * -1;
end

H = 11
H_actuelle = H;          % Hauteur actuelle du disque. Sera mise a jour selon les déplacements ...
    encourus

if profil==1
    hyp = sqrt((H/2)^2+g^2);          % Hypothenuse reliant l'extremite de l'arc et l' ...
        equateur de l'arc
    gamma_1 = atan(g/(H/2));
    r_phi_1 = (hyp/2)/sin(gamma_1);
    Gamma_1 = 2*gamma_1;
    l_arc_1 = r_phi_1*2*Gamma_1;      % Longueur de l'arc de cercle dans un plan vertical ...
        passant par l'axe de revolution
    Gamma_np = asin((H/2)/(r_phi_1 - M_t(1,1)/2));
    R = rnp - (r_phi_1-M_t(1,1)/2)*cos(Gamma_np);          % Rayon majeur du tore avant ...
        mise en charge

```


```

**end**

*% Conditions aux limites*

```
CL1x = rnp + M_t(1,1)/2;      % Condition limite en x au plateau vertebreal superieur
CL2x = rnp + M_t(1,1)/2 + g; % Condition limite en x au plan transversal de symetrie
CL3x = rnp + M_t(1,1)/2;      % Condition limite en x au plateau vertebreal inferieur
```

*% if profil == 2*

*%     CL1ry = 0;*

*%     CL3ry = 0;*

**if** profil==3

*% La courbe est orientee de sorte que l'axe z est l'abscisse et l'axe x est l'ordonnee.*

*CL1ry = -1; % Condition limite (pente) au plateau vertebreal superieur exprimee par dx/ ...*  
*dz*

*CL3ry = 0;*

**elseif** profil==4

*CL1ry = -0.22; % Condition limite (pente) au plateau vertebreal superieur*

*CL3ry = -CL1ry; % Condition limite (pente) au plateau vertebreal inferieur*

**else**

*CL1ry = 0;*

*CL3ry = 0;*

**end**

*%% -----*

*% ---- Passage au programme de calcul des proprietes mecaniques ----*

**if** anisotrope == n

*PROP\_MEC\_ISO*

**else**

*PROP\_MEC\_ANISO*

**end**

*% Fin du programme de demarrage*



## Programme de définition des propriétés mécaniques

```
% Programme qui calcule les proprietes dans chaque lamelle en fonction des proprietes ...
%   obtenues par un essai de traction bi-axiale sur un groupe de lamelles (O'Connell, 2012)

% Projet de doctorat, Ecole de technologie superieure
% Departement de genie mecanique
% Copyright Sebastien Demers, ing.

disp('Calcul_des_proprietes_mecaniques_anisotropes...')
disp(' ')
disp('Transformation_des_proprietes_mecaniques_d''un_groupe_de_lamelles ,_du_repere _ ...
      circonferentiel_(x)_-_longitudinal_(y)_vers_le_repere_des_fibres_pour_une_lamelle _ ...
      unidirectionnelle...')
disp(' ')

syms A11 A12 A22 A66 Q11_barre Q12_barre Q22_barre Q66_barre Q11 Q12 Q22 Q66 E1 E2 G12 v21

% Proprietes connues
t_sample = 2.1;      % epaisseur de l'echantillon (mm) (O'Connell, 2012)
n_sample = 10;       % Nombre de lamelles de l'essai (estimation faite selon l'epaisseur de ...
                      % l'echantillon (2.1 mm (O'Connell, 2012)) divisee par l'epaisseur de chaque lamelle ...
                      % (0.2 mm (Cassidy, 1989)).
t_couche_sample = t_sample/n_sample;
s_sample(1,1) = -t_sample/2; % Position de la surface interieure de la premiere lamelle ...
                           % de l'echantillon, selon la figure 7.9 de Gibson (2007) (p. 278)
for j=2:1:n_sample + 1
    s_sample(1,j) = s_sample(1,1) + (j-1)*t_couche_sample;
end
Ex_sample = 21;      % +/- 19.6 (MPa) (direction circonferentielle, site anterieur exterieur), ...
                    % tire de O'Connell (2012)
Ey_sample = 12.5;    % (MPa) (O'Connell, 2012)
Gxy_sample = 9.64;   % +/- 14.33 (MPa) (O'Connell, 2012)
v12 = 0.45;         % Par hypothese, presque incompressible
beta = 30*pi/180;

A = [A11 A12 0 ; A12 A22 0 ; 0 0 A66];
A_prime = inv(A);

Eq1 = Ex_sample - 1/(t_sample*A_prime(1,1));
Eq2 = Ey_sample - 1/(t_sample*A_prime(2,2));
Eq3 = Gxy_sample - 1/(t_sample*A_prime(3,3));
somme_11 = 0;
somme_12 = 0;
```

```

somme_22 = 0;
somme_66 = 0;
for j=1:1:n_sample
    somme_11 = somme_11 + Q11_barre*(s_sample(1,j+1) - s_sample(1,j));    % Q_barre_11 est ...
                                identique pour toutes les couches
    somme_12 = somme_12 + Q12_barre*(s_sample(1,j+1) - s_sample(1,j));    % Q_barre_12 est ...
                                identique pour toutes les couches
    somme_22 = somme_22 + Q22_barre*(s_sample(1,j+1) - s_sample(1,j));    % Q_barre_22 est ...
                                identique pour toutes les couches
    somme_66 = somme_66 + Q66_barre*(s_sample(1,j+1) - s_sample(1,j));    % Q_barre_66 est ...
                                identique pour toutes les couches
end
Eq4 = A11 - somme_11;
Eq5 = A12 - somme_12;
Eq6 = A22 - somme_22;
Eq7 = A66 - somme_66;

Eq8 = Q11_barre - (Q11*(cos(beta))^4 + Q22*(sin(beta))^4 + 2*(Q12 + 2*Q66)*(sin(beta))^2*( ...
    cos(beta))^2);
Eq9 = Q12_barre - ((Q11 + Q22 - 4*Q66)*(sin(beta))^2*(cos(beta))^2 + Q12*((cos(beta))^4 + ( ...
    sin(beta))^4));
Eq10 = Q22_barre - (Q11*(sin(beta))^4 + Q22*(cos(beta))^4 + 2*(Q12 + 2*Q66)*(sin(beta))^2*( ...
    cos(beta))^2);
Eq11 = Q66_barre - ((Q11 + Q22 - 2*Q12 - 2*Q66)*(sin(beta))^2*(cos(beta))^2 + Q66*((sin( ...
    beta))^4 + (cos(beta))^4));

Eq12 = Q11 - E1/(1-v12*v21);
Eq13 = Q12 - v12*E2/(1-v12*v21);
Eq14 = Q22 - E2/(1-v12*v21);
Eq15 = Q66 - G12;
Eq16 = v21 - v12*E2/E1;

PROP = solve(Eq1,Eq2,Eq3,Eq4,Eq5,Eq6,Eq7,Eq8,Eq9,Eq10,Eq11,Eq12,Eq13,Eq14,Eq15,Eq16,'A11, ...
    A12,A22,A66,Q11_barre,Q12_barre,Q22_barre,Q66_barre,Q11,Q12,Q22,Q66,E1,E2,G12,v21')

sol_A11 = PROP.A11(1,1);
A11_num = eval(sol_A11);
sol_A12 = PROP.A12(1,1);
A12_num = eval(sol_A12);
sol_A22 = PROP.A22(1,1);
A22_num = eval(sol_A22);
sol_A66 = PROP.A66(1,1);
A66_num = eval(sol_A66);

```

```

sol_Q11_barre = PROP.Q11_barre(1,1);
Q11_barre_num = eval(sol_Q11_barre);
sol_Q12_barre = PROP.Q12_barre(1,1);
Q12_barre_num = eval(sol_Q12_barre);
sol_Q22_barre = PROP.Q22_barre(1,1);
Q22_barre_num = eval(sol_Q22_barre);
sol_Q66_barre = PROP.Q66_barre(1,1);
Q66_barre_num = eval(sol_Q66_barre);

sol_Q11 = PROP.Q11(1,1);
Q11_num = eval(sol_Q11);
sol_Q12 = PROP.Q12(1,1);
Q12_num = eval(sol_Q12);
sol_Q22 = PROP.Q22(1,1);
Q22_num = eval(sol_Q22);
sol_Q66 = PROP.Q66(1,1);
Q66_num = eval(sol_Q66);

sol_E1 = PROP.E1(1,1);
E1_num = eval(sol_E1);
sol_E2 = PROP.E2(1,1);
E2_num = eval(sol_E2);
sol_G12 = PROP.G12(1,1);
G12_num = eval(sol_G12);
sol_v21 = PROP.v21(1,1);
v21_num = eval(sol_v21);

Q_num = [Q11_num Q12_num 0 ; Q12_num Q22_num 0 ; 0 0 2*Q66_num]
%Q_barre_num = [Q11_barre_num Q12_barre_num 0 ; Q12_barre_num Q22_barre_num 0 ; 0 0 ...
    Q66_barre_num]
A_num = [A11_num A12_num 0 ; A12_num A22_num 0 ; 0 0 A66_num]
A_prime_num = inv(A_num)
Ef = E1_num
Et = E2_num
Gft = G12_num
vft = v12
vtf = v21_num

% Composantes de la matrice de souplesse
S11 = 1 / Ef;
S22 = 1 / Et;
S12 = -vft / Et;
S21 = S12;
S66 = 1 / Gft;

```

```

S = [S11, S12, 0; S21, S22, 0; 0, 0, S66]; % Matrice ...
de souplesse

% Composantes de la matrice de rigidite
Q21_num = Q12_num;

for j=1:1:nb_couche
    beta_temp = M_beta(1,j);
    Q_barre_11 = Q11_num*(cos(beta_temp))^4 + Q22_num*(sin(beta_temp))^4 + 2*(Q12_num + ...
        2*Q66_num) * (sin(beta_temp))^2 * (cos(beta_temp))^2;
    Q_barre_12 = (Q11_num + Q22_num - 4* Q66_num) * (sin(beta_temp))^2 * (cos(beta_temp) ...
        )^2 + Q12_num * ((cos(beta_temp))^4 + (sin(beta_temp))^4);
    Q_barre_22 = Q11_num * (sin(beta_temp))^4 + Q22_num * (cos(beta_temp))^4 + 2 * ( ...
        Q12_num + 2* Q66_num) * (sin(beta_temp))^2 * (cos(beta_temp))^2;
    Q_barre_16 = (Q11_num - Q12_num - 2*Q66_num) * (cos(beta_temp))^3 * (sin(beta_temp) ...
        ) - (Q22_num - Q12_num - 2 * Q66_num) * cos(beta_temp) * (sin(beta_temp))^3;
    Q_barre_26 = (Q11_num - Q12_num - 2*Q66_num) * cos(beta_temp) * (sin(beta_temp))^3 ...
        - (Q22_num - Q12_num - 2*Q66_num) * (cos(beta_temp))^3 * sin(beta_temp);
    Q_barre_66 = (Q11_num + Q22_num - 2*Q12_num - 2*Q66_num) * (sin(beta_temp))^2 * ( ...
        cos(beta_temp))^2 + Q66_num * ((sin(beta_temp))^4 + (cos(beta_temp))^4);
    Q_barre(:, :, j) = [Q_barre_11, Q_barre_12, Q_barre_16; Q_barre_12, Q_barre_22, ...
        Q_barre_26; Q_barre_16, Q_barre_26, Q_barre_66];
    S_barre(:, :, j) = inv(Q_barre(:, :, j));
end

v = vft; % Utilise pour le calcul de la longueur infinie (attenuation des effets de ...
discontinuite) dans le programme SOLUTION_DISCONT.m
D_11 = zeros(1,nb_couche);
D_22 = zeros(1,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    t_temp = M_t(1,j);
    Q_barre_11_temp = Q_barre(1,1,j);
    Q_barre_22_temp = Q_barre(2,2,j);
    D_11_temp = 1/12*Q_barre_11_temp*t_temp^3;
    D_22_temp = 1/12*Q_barre_22_temp*t_temp^3;
    D_11(1,j) = D_11_temp;
    D_22(1,j) = D_22_temp;
end

% Calcul de E dans le repere theta-phi (Gibson, Eq. 2.39, page 68)
M_E_theta = zeros(1,nb_couche);
M_E_phi = zeros(1,nb_couche);
M_G_theta_phi = zeros(1,nb_couche);

```

```

for j=1:1:nb_couche
    beta_temp = M_beta(1,j);
    E_theta_temp = (1/Ef*(cos(beta_temp))^4 + (1/Gft - 2*vft/Ef)*(sin(beta_temp))^2*(cos( ...
        beta_temp))^2 + 1/Et*(sin(beta_temp))^4)^-1;
    M_E_theta(1,j) = E_theta_temp;
    E_phi_temp = (1/Ef*(sin(beta_temp))^4 + (1/Gft - 2*vft/Ef)*(sin(beta_temp))^2*(cos( ...
        beta_temp))^2 + 1/Et*(cos(beta_temp))^4)^-1;
    M_E_phi(1,j) = E_phi_temp;
    G_theta_phi_temp = (1/Gft*((sin(beta_temp))^4 + (cos(beta_temp))^4) + 4*(1/Ef + 1/Et + ...
        2*vft/Ef - 1/(2*Gft))*(sin(beta_temp))^2*(cos(beta_temp))^2)^-1;
    M_G_theta_phi(1,j) = G_theta_phi_temp;
end

% Calcul de v dans le repere theta-phi (Gibson, Eq. 2.39, page 68)
M_v_theta_phi = zeros(1,nb_couche);
M_v_phi_theta = zeros(1,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    E_theta_temp = M_E_theta(1,j);
    E_phi_temp = M_E_phi(1,j);
    v_theta_phi_temp = E_theta_temp*(vft/Ef*((sin(beta_temp))^4 + (cos(beta_temp))^4) - (1/ ...
        Ef + 1/Et - 1/Gft)*(sin(beta_temp))^2*(cos(beta_temp))^2);
    M_v_theta_phi(1,j) = v_theta_phi_temp;
    v_phi_theta_temp = E_phi_temp*(vft/Et*((sin(beta_temp))^4 + (cos(beta_temp))^4) - (1/Ef ...
        + 1/Et - 1/Gft)*(sin(beta_temp))^2*(cos(beta_temp))^2);
    M_v_phi_theta(1,j) = v_phi_theta_temp;
end
disp(['Le module d\'Young dans les lamelles selon theta est : ', num2str(M_E_theta)])
disp(['Le module d\'Young dans les lamelles selon phi est : ', num2str(M_E_phi)])
disp(['Le module de cisaillement dans les lamelles selon theta-phi est : ', num2str( ...
    M_G_theta_phi)])
disp(['Le coefficient de Poisson v_theta_phi est : ', num2str(M_v_theta_phi)])
disp(['Le coefficient de Poisson v_phi_theta est : ', num2str(M_v_phi_theta)])
pause(2)

% Calcul des modules d'elasticite effectifs (approximation posee dans ma
% these)
M_E_phi_eff = zeros(1,nb_couche);
M_E_theta_eff = zeros(1,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    t_temp = M_t(1,j);
    v_phi_theta_temp = M_v_phi_theta(1,j);
    v_theta_phi_temp = M_v_theta_phi(1,j);
    E_phi_eff_temp = 12*(1 - v_phi_theta_temp^2)*D_22_temp/t_temp^3;
    M_E_phi_eff(1,j) = E_phi_eff_temp;

```

```

E_theta_eff_temp = 12*(1 - v_theta_phi_temp^2)*D_11_temp/t_temp^3;
M_E_theta_eff(1,j) = E_theta_eff_temp;
end

disp(['La_rigidite_membrane_longitudinale_est:',num2str(D_22)])
disp(['La_rigidite_membrane_circonfrentielle_est:',num2str(D_11)])
disp(['Le_module_d''elasticite_equivalent_circonfrentiel_est:',num2str(M_E_theta_eff)])
disp(['Le_module_d''elasticite_equivalent_longitudinal_est:',num2str(M_E_phi_eff)])
disp(' ')
pause(2)

dr_total_lamelle_externe = 1.89;    % (mm) base sur le modele FEM (et pourrait provenir d' ...
    une etude experimentale)
% Le déplacement devrait décroître en fonction de chaque subload (par
% hypothese), selon une relation lineaire. Posons comme hypothese que le premier subload a ...
    10% plus d'effet que le dernier subload. En pratique, on pourrait mesurer le bulge en ...
    fonction de la charge.
ecart_dr_subloads = 0.10;
dr_moyen_lamelle_externe = dr_total_lamelle_externe / nb_subload;
dr_premier_subload_lamelle_externe = dr_moyen_lamelle_externe*(1 + ecart_dr_subloads/2);
dr_dernier_subload_lamelle_externe = dr_moyen_lamelle_externe*(1 - ecart_dr_subloads/2);
dr_subload_lamelle_externe = (dr_premier_subload_lamelle_externe - ...
    dr_dernier_subload_lamelle_externe)/(nb_subload - 1);
dr_lamelle_externe_temp = dr_premier_subload_lamelle_externe;
M_dr_total_impose = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
M_dr_total_impose(1,nb_couche,1) = dr_lamelle_externe_temp;
for k = 2:1:nb_subload
    dr_lamelle_externe_temp = dr_lamelle_externe_temp - dr_subload_lamelle_externe;
    M_dr_total_impose(1,nb_couche,k) = dr_lamelle_externe_temp;
end

% Maintenant que les déplacements a la lamelle exterieure sont connus, il faut soit mesurer ...
    experimentalement les déplacements a la lamelle interieure pour chaque subload, soit ...
    estimer le déplacement. Supposons ici que les déplacements sont egaux entre les ...
    lamelles, de sorte que la compression radiale soit negligee.

for k = 1:1:nb_subload
    for j = 1:1:nb_couche - 1
        M_dr_total_impose(1,j,k) = M_dr_total_impose(1,nb_couche,k);
    end
end
end
M_dr_total_impose;

% Calcul de la matrice de souplesse pour ANSYS

```

```

% f correspond a la direction 1
% t correspond a la direction 2
% r correspond a la direction 3

Er = Et;
vtr = 0.45; % Presque incompressible par hypothese
vrf = vtf;
vrt = vtr;
vfr = vft;
syms Gtr    % Module de cisaillement de la matrice (a resoudre sachant que (C22-C23)/2 (eq. ...
            2.17 (Gibson, 2007)))
Grf = Gft;

S11 = 1/Ef;
S12 = -vtf/Et;
S13 = -vrf/Er;
S14 = 0;
S15 = 0;
S16 = 0;
S21 = -vft/Ef;
S22 = 1/Et;
S23 = -vrt/Er;
S24 = 0;
S25 = 0;
S26 = 0;
S31 = -vfr/Ef;
S32 = -vtr/Et;
S33 = 1/Er;
S34 = 0;
S35 = 0;
S36 = 0;
S41 = 0;
S42 = 0;
S43 = 0;
S44 = 1/Gtr;
S45 = 0;
S46 = 0;
S51 = 0;
S52 = 0;
S53 = 0;
S54 = 0;
S55 = 1/Grf;
S56 = 0;
S61 = 0;

```

```

S62 = 0;
S63 = 0;
S64 = 0;
S65 = 0;
S66 = 1/Gft;

S_ANSYS = [S11 S12 S13 S14 S15 S16 ; S21 S22 S23 S24 S25 S26 ; S31 S32 S33 S34 S35 S36 ; ...
           S41 S42 S43 S44 S45 S46 ; S51 S52 S53 S54 S55 S56 ; S61 S62 S63 S64 S65 S66];
C_ANSYS = inv(S_ANSYS);

C_ANSYS_22 = C_ANSYS(2,2);
C_ANSYS_23 = C_ANSYS(2,3);
C_ANSYS_44 = C_ANSYS(4,4);

eq_Gtr = C_ANSYS_44 - (C_ANSYS_22 - C_ANSYS_23)/2;
sol_Gtr = solve(eq_Gtr,'Gtr');
Gtr = eval(sol_Gtr);

S_ANSYS = eval(S_ANSYS);
disp('La matrice de souplesse a inclure dans ANSYS est:')
disp(S_ANSYS)

pause(2)

%% -----
%  ____ Passage au programme de calcul des parametres geometriques -----

GEOMETRIE

% Fin du programme

```



## Programme de construction de la géométrie

```

%% Programme qui calcule la geometrie pour un profil en arc de cercle , d'ordre 3 ou d'ordre ...
    4 (polynome d'ordre 4)

% Projet de doctorat , Ecole de technologie superieure
% Departement de genie mecanique
% Copyright Sebastien Demers, ing.

syms coord_intersect_x coord_intersect_z z zz

if it_grand_dep == 0
    disp(' Calcul_des_parametres_geometriques ... ')
    disp(' ')
end

compteur = compteur + 1;
compteur_membrane = compteur_membrane + 1;

% Appel de la fonction de construction de la matrice de hauteur des plans de coupe
[M_Hpc] = fonction_M_H(nbpt, H_actuelle);

if decalage_profil == 1
    % CL1x, CL2x, CL3x, CL1ry et CL3ry sont calculees initialement dans DOCTORAT.m ( ...
    % programme de démarrage) puis ensuite dans GEOM_GRAND_DEP_membrane et/ou ...
    % GEOM_GRAND_DEP_discont
    CL1z = H_actuelle/2;
    CL2z = 0;
    CL3z = -H_actuelle/2;
end

if decalage_profil == 1 % Decalage normal
    cd decalage_normal

    M_offset = zeros(1,nb_couche-1); % Matrice des decalages des lamelles au plan ...
    % transversal de symetrie pour le calcul de la condition CL2x.
    M_CL1x = zeros(1,nb_couche);
    M_CL1z = zeros(1,nb_couche);
    M_CL1ry = zeros(1,nb_couche);
    M_CL2x = zeros(1,nb_couche);
    M_CL2z = zeros(1,nb_couche);
    M_CL3x = zeros(1,nb_couche);
    M_CL3z = zeros(1,nb_couche);
    M_CL3ry = zeros(1,nb_couche);

```

```

M_profil_cnt_origine = zeros(5,nb_couche);
M_profil_cnt = zeros(5,nb_couche);
M_profil_coord_x_origine = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_y_origine = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_z_origine = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_x = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_y = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_z = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_rayons = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_vecteur_tangent_x = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_vecteur_tangent_y = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_vecteur_tangent_z = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_vecteur_normal_x = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_vecteur_normal_y = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_vecteur_normal_z = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_x_centre_courbure = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_y_centre_courbure = zeros(nbpt,nb_couche);
M_profil_coord_z_centre_courbure = zeros(nbpt,nb_couche);

M_profil_cnt_origine_s = zeros(5,nb_couche+1);
M_profil_cnt_s = zeros(5,nb_couche+1);
M_profil_coord_x_origine_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_y_origine_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_z_origine_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_x_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_y_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_z_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_rayons_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_vecteur_tangent_x_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_vecteur_tangent_y_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_vecteur_tangent_z_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_vecteur_normal_x_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_vecteur_normal_y_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_vecteur_normal_z_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_x_centre_courbure_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_y_centre_courbure_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
M_profil_coord_z_centre_courbure_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);

if profil==1      % Profil en arc de cercle

    disp('Calcul_des_decalages_pour_les_profils_des_lamelles ...')
    disp('_')

```

```

M_CL2x(1,1) = CL2x;

epaisseur_pv_temp = 0; % epaisseur aux plateaux vertebraux
M_epaisseur_pv(1,1) = epaisseur_pv_temp;
for j=1:1:nb_couche
    M_CL1x(1,j) = CL1x+epaisseur_pv_temp;
    M_CL1z(1,j) = CL1z;
    M_CL2z(1,j) = CL2z;
    M_CL3x(1,j) = CL3x+epaisseur_pv_temp;
    M_CL3z(1,j) = CL3z;
    if j<nb_couche
        epaisseur_pv_temp = epaisseur_pv_temp + M_t(1,j)/2 + M_t(1,j+1)/2;
        M_epaisseur_pv(1,j+1) = epaisseur_pv_temp;
    end
end

epaisseur_temp = 0; % epaisseur au plan transversal de symetrie
for j=1:1:nb_couche

    CL1x_temp = M_CL1x(1,j);
    CL1z_temp = M_CL1z(1,j);
    CL2x_temp = M_CL2x(1,j);
    CL2z_temp = M_CL2z(1,j);
    CL3x_temp = M_CL3x(1,j);
    CL3z_temp = M_CL3z(1,j);

    % Appel de la fonction qui calcule les rayons de courbure en differents points ...
    % de la courbe
    [M_profil_rayons_temp]=fonction_M_profil_cercle_rayons(nbpt, CL1x_temp, ...
        CL1z_temp, CL2x_temp);
    M_profil_rayons(:,j) = M_profil_rayons_temp;

    % Appel de la fonction qui calcule les coordonnees des centres de courbure en ...
    % differents points du profil
    [M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp]= ...
        fonction_M_profil_cercle_coord_centre_courbure(nbpt, CL1x_temp, CL1z_temp, ...
        CL2x_temp, CL2z_temp);
    M_profil_coord_x_centre_courbure(:,j) = M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp ...
        (:,1);
    M_profil_coord_y_centre_courbure(:,j) = M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp ...
        (:,2);
    M_profil_coord_z_centre_courbure(:,j) = M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp ...
        (:,3);

```

```

[M_profil_coord_xyz_temp]=fonction_M_profil_cercle_coord(nbpt, M_Hpc, ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp, M_profil_rayons_temp);
M_profil_coord_x(:,j) = M_profil_coord_xyz_temp(:,1);
M_profil_coord_y(:,j) = M_profil_coord_xyz_temp(:,2);
M_profil_coord_z(:,j) = M_profil_coord_xyz_temp(:,3);

% Appel de la fonction qui calcule le vecteur tangent aux points de la lamelle ...
j
[M_profil_vecteur_tangent_xyz_temp]=fonction_M_profil_cercle_vecteur_tangent( ...
    nbpt, M_profil_coord_xyz_temp, M_profil_rayons_temp, ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp);
M_profil_vecteur_tangent_x(:,j) = M_profil_vecteur_tangent_xyz_temp(:,1);
M_profil_vecteur_tangent_y(:,j) = M_profil_vecteur_tangent_xyz_temp(:,2);
M_profil_vecteur_tangent_z(:,j) = M_profil_vecteur_tangent_xyz_temp(:,3);

% Appel de la fonction qui calcule le vecteur normal aux points de la premiere ...
lamelle
[M_profil_vecteur_normal_xyz_temp]=fonction_M_profil_cercle_vecteur_normal(nbpt ...
    , M_profil_vecteur_tangent_xyz_temp);
M_profil_vecteur_normal_x(:,j) = M_profil_vecteur_normal_xyz_temp(:,1);
M_profil_vecteur_normal_y(:,j) = M_profil_vecteur_normal_xyz_temp(:,2);
M_profil_vecteur_normal_z(:,j) = M_profil_vecteur_normal_xyz_temp(:,3);

axis equal

if compression_radiale == 1 % La compression radiale des lamelles est ...
    ignoree
    if j < nb_couche
        surface = 0; % On traite le profil de la mi-epaisseur de la lamelle
        [offset_temp]=fonction_offset_profil_cercle(surface, j+1, M_Hpc, M_CL1x ...
            , M_CL1z, M_profil_rayons(:,1), M_profil_coord_x_centre_courbure ...
            (:,1), M_profil_coord_z_centre_courbure(:,1));
        M_offset(1,j) = offset_temp;
        M_CL2x(1,j+1) = M_CL2x(1,1) + offset_temp;
    end
else % La compression radiale des lamelles est tenue en consideration
    if j<nb_couche
        % evaluation du decalage normal de la prochaine lamelle
        if compteur_subload == 0
            surface = 0; % On traite le profil de la mi-epaisseur de la lamelle
            [offset_temp]=fonction_offset_profil_cercle(surface, j+1, M_Hpc, ...
                M_CL1x, M_CL1z, M_profil_rayons(:,1), ...
                M_profil_coord_x_centre_courbure(:,1), ...
                M_profil_coord_z_centre_courbure(:,1));

```

```

M_offset(1,j) = offset_temp;
M_CL2x(1,j+1) = M_CL2x(1,1) + offset_temp;
else
t_temp_1 = M_CL_s_lin_discont(4,j+1,compteur_subload) - ...
M_CL_s_lin_discont(4,j,compteur_subload);
t_temp_2 = M_CL_s_lin_discont(4,j+2,compteur_subload) - ...
M_CL_s_lin_discont(4,j+1,compteur_subload);
delta_t_temp_1 = -v*t_temp_1/E * (M_S_theta_t_lin_total(m,j, ...
compteur_subload) + M_S_phi_t_lin_total(m,j,compteur_subload));
delta_t_temp_2 = -v*t_temp_2/E * (M_S_theta_t_lin_total(m,j+1, ...
compteur_subload) + M_S_phi_t_lin_total(m,j+1,compteur_subload)) ...
;
offset_temp = (t_temp_1 + delta_t_temp_1)/2 + (t_temp_2 + ...
delta_t_temp_2)/2;
epaisseur_temp = epaisseur_temp + offset_temp;
M_offset(1,j) = epaisseur_temp;
M_CL2x(1,j+1) = M_CL2x(1,1) + epaisseur_temp;
%M_CL2x(1,j+1) = M_coord_x_B_t_lin_discont(m,j,compteur_subload) + ...
offset_temp
end
end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Meme demarche appliquee aux surfaces des lamelles %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp(' Calcul des decalages pour les surfaces des lamelles ... ')
disp(' _ ')

M_offset_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL1x_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL1z_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL1ry_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL2x_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL2z_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL3x_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL3z_s = zeros(1,nb_couche+1);
M_CL3ry_s = zeros(1,nb_couche+1);

epaisseur_pv_s_temp = -M_t(1,1)/2; % epaisseur aux plateaux vertebraux
M_epaisseur_pv_s(1,1) = epaisseur_pv_s_temp;
for j=1:1:nb_couche+1
M_CL1x_s(1,j) = CL1x+epaisseur_pv_s_temp;

```

```

M_CL1z_s(1,j) = CL1z;
M_CL2z_s(1,j) = CL2z;
M_CL3x_s(1,j) = CL3x+epaisseur_pv_s_temp;
M_CL3z_s(1,j) = CL3z;
if j<nb_couche+1
    epaisseur_pv_s_temp = epaisseur_pv_s_temp + M_t(1,j);
    M_epaisseur_pv_s(1,j+1) = epaisseur_pv_s_temp;
end
end

epaisseur_s_temp = 0;          % epaisseur au plan transversal de symetrie
for j=1:1:nb_couche+1

    CL1x_s_temp = M_CL1x_s(1,j);
    CL1z_s_temp = M_CL1z_s(1,j);
    CL2z_s_temp = M_CL2z_s(1,j);
    CL3x_s_temp = M_CL3x_s(1,j);
    CL3z_s_temp = M_CL3z_s(1,j);

    if compression_radiale == 1      % La compression radiale des lamelles est ...
        ignoree
        % evaluation du decalage normal de la prochaine lamelle
        surface = 1; % On traite le profil de la mi-epaisseur de la lamelle
        [offset_s_temp]=fonction_offset_profil_cercle(surface, j, M_Hpc, M_CL1x_s, ...
            M_CL1z_s, M_profil_rayons(:,1), M_profil_coord_x_centre_courbure(:,1), ...
            M_profil_coord_z_centre_courbure(:,1));
        M_offset_s(1,j) = offset_s_temp;
        CL2x_s_temp = M_CL2x(1,1) + offset_s_temp;
        M_CL2x_s(1,j) = CL2x_s_temp;
    else
        % La compression radiale des lamelles est tenue en consideration
        % evaluation du decalage normal de la prochaine lamelle
        if compteur_subload == 0
            surface = 1; % On traite le profil de la mi-epaisseur de la lamelle
            [offset_s_temp]=fonction_offset_profil_cercle(surface, j, M_Hpc, ...
                M_CL1x_s, M_CL1z_s, M_profil_rayons(:,1), ...
                M_profil_coord_x_centre_courbure(:,1), ...
                M_profil_coord_z_centre_courbure(:,1));
            M_offset_s(1,j) = offset_s_temp;
            CL2x_s_temp = M_CL2x(1,1) + offset_s_temp;
            M_CL2x_s(1,j) = CL2x_s_temp;
        elseif j == 1
            t_temp_1 = M_CL_s_lin_discont(4,j+1,compteur_subload) - ...
                M_CL_s_lin_discont(4,j,compteur_subload);

```

```

    delta_t_temp_1 = -v*t_temp_1/E * ( M_S_theta_t_lin_total(m,j , ...
        compteur_subload) + M_S_phi_t_lin_total(m,j ,compteur_subload));
    offset_s_temp = -(t_temp_1 + delta_t_temp_1)/2;
    epaisseur_s_temp = epaisseur_s_temp + offset_s_temp;
    M_offset_s(1,j) = epaisseur_s_temp;
    CL2x_s_temp = M_CL2x(1,1) + epaisseur_s_temp;
    M_CL2x_s(1,j) = CL2x_s_temp;
    %M_CL2x_s(1,j) = M_coord_x_B_t_lin_discont(m,j ,compteur_subload) + ...
        offset_s_temp
else
    t_temp_1 = M_CL_s_lin_discont(4,j ,compteur_subload) - M_CL_s_lin_discont ...
        (4,j-1,compteur_subload);
    delta_t_temp_1 = -v*t_temp_1/E * ( M_S_theta_t_lin_total(m,j-1, ...
        compteur_subload) + M_S_phi_t_lin_total(m,j-1,compteur_subload));
    offset_s_temp = t_temp_1 + delta_t_temp_1;
    epaisseur_s_temp = epaisseur_s_temp + offset_s_temp;
    M_offset_s(1,j) = epaisseur_s_temp;
    CL2x_s_temp = M_CL2x(1,1) + epaisseur_s_temp;
    M_CL2x_s(1,j) = CL2x_s_temp;
    %M_CL2x_s(1,j) = M_coord_x_B_t_lin_discont(m,j-1,compteur_subload) + ...
        offset_s_temp
end
end

% Appel de la fonction qui calcule les rayons de courbure en differents points ...
% de la courbe
[M_profil_rayons_s_temp]=fonction_M_profil_cercle_rayons(nbpt , CL1x_s_temp, ...
    CL1z_s_temp , CL2x_s_temp);
M_profil_rayons_s(:,j) = M_profil_rayons_s_temp;

% Appel de la fonction qui calcule les coordonnees des centres de courbure en ...
% differents points du profil
[M_profil_coord_xyz_centre_courbure_s_temp]= ...
    fonction_M_profil_cercle_coord_centre_courbure(nbpt , CL1x_s_temp, ...
    CL1z_s_temp , CL2x_s_temp , CL2z_s_temp);
M_profil_coord_x_centre_courbure_s(:,j) = ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_s_temp(:,1);
M_profil_coord_y_centre_courbure_s(:,j) = ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_s_temp(:,2);
M_profil_coord_z_centre_courbure_s(:,j) = ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_s_temp(:,3);

[M_profil_coord_xyz_s_temp]=fonction_M_profil_cercle_coord(nbpt , M_Hpc, ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_s_temp , M_profil_rayons_s_temp);

```

```

M_profil_coord_x_s(:,j) = M_profil_coord_xyz_s_temp(:,1);
M_profil_coord_y_s(:,j) = M_profil_coord_xyz_s_temp(:,2);
M_profil_coord_z_s(:,j) = M_profil_coord_xyz_s_temp(:,3);

% Appel de la fonction qui calcule le vecteur tangent aux points de la lamelle ...
j
[M_profil_vecteur_tangent_xyz_s_temp]=fonction_M_profil_cercle_vecteur_tangent( ...
    nbpt, M_profil_coord_xyz_s_temp, M_profil_rayons_s_temp, ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure_s_temp);
M_profil_vecteur_tangent_x_s(:,j) = M_profil_vecteur_tangent_xyz_s_temp(:,1);
M_profil_vecteur_tangent_y_s(:,j) = M_profil_vecteur_tangent_xyz_s_temp(:,2);
M_profil_vecteur_tangent_z_s(:,j) = M_profil_vecteur_tangent_xyz_s_temp(:,3);

% Appel de la fonction qui calcule le vecteur normal aux points de la premiere ...
lamelle
[M_profil_vecteur_normal_xyz_s_temp]=fonction_M_profil_cercle_vecteur_normal( ...
    nbpt, M_profil_vecteur_tangent_xyz_s_temp);
M_profil_vecteur_normal_x_s(:,j) = M_profil_vecteur_normal_xyz_s_temp(:,1);
M_profil_vecteur_normal_y_s(:,j) = M_profil_vecteur_normal_xyz_s_temp(:,2);
M_profil_vecteur_normal_z_s(:,j) = M_profil_vecteur_normal_xyz_s_temp(:,3);
end

figure('Name','Trace_des_lamelles_pour_un_profil_en_arc_de_cercle')
plot(M_profil_coord_x,M_profil_coord_z,'b')
hold on
plot(M_profil_coord_x_s,M_profil_coord_z_s,'r')
xlabel('Position_en_x(mm)')
ylabel('Position_en_z(mm)')
axis equal

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
elseif profil == 3
    disp('Le_decalage_normal_du_profil_n''est_pas_disponible_pour_un_polynome_d''ordre_ ...
        3.')
elseif profil == 2 || profil == 4
    %[...] Code masque car option non utilisee pour l'article 4
end

% Appel de la fonction de construction de la matrice M_r_phi_s
[M_r_phi_s]=fonction_M_r_phi_s(profil, nbpt, nb_couche, M_profil_rayons_s);

% Appel de la fonction de construction de la matrice M_R
[M_R]=fonction_M_R_majeur(nbpt, nb_couche, M_profil_coord_x_centre_courbure);

```



```

% Appel de la fonction de construction de la matrice M_R_s
[M_R_s]=fonction_M_R_majeur_s(nbpt , nb_couche , M_profil_coord_x_centre_courbure_s);

% Appel de la fonction de construction de la matrice M_r_phi (rayon r_phi a l'epaisseur ...
    moyenne des lamelles)
[M_r_phi] = fonction_M_r_phi(profil , nbpt , nb_couche , M_profil_rayons);

% Appel de la fonction de construction de la matrice des angles phi aux surfaces ( ...
    lignes:hauteur; colonnes:lamelle)
[M_phi_s] = fonction_M_phi_s(nbpt , m , nb_couche , M_profil_vecteur_normal_x_s , ...
    M_profil_vecteur_normal_y_s , M_profil_vecteur_normal_z_s);

% Appel de la fonction de construction de la matrice phi aux mi-epaisseurs (rayons ...
    moyens)
[M_phi] = fonction_M_phi(nbpt , m , nb_couche , M_profil_vecteur_normal_x , ...
    M_profil_vecteur_normal_y , M_profil_vecteur_normal_z);

% Appel de la fonction de construction de la matrice phi aux mi-epaisseurs au niveau ...
    des plateaux vertebraux
[M_phi_pvs , M_phi_pvi] = fonction_M_phi_pv(nbpt , nb_couche , M_phi);

% Appel de la fonction de construction de la matrice des rayons r_theta aux surfaces
[M_r_theta_s] = fonction_M_r_theta_s(nbpt , m , nb_couche , M_R_s , M_phi_s , M_r_phi_s);

% Appel de la fonction de construction de la matrice des rayons horizontaux aux ...
    surfaces
[M_r_s] = fonction_M_r_s(nbpt , m , nb_couche , M_r_theta_s , M_phi_s);

% Appel de la fonction de construction de la matrice des rayons r_theta aux mi- ...
    epaisseurs des lamelles
[M_r_theta] = fonction_M_r_theta(nbpt , m , nb_couche , M_R , M_phi , M_r_phi);

% Appel de la fonction de construction de la matrice des rayons horizontaux aux mi- ...
    epaisseurs des lamelles
[M_r] = fonction_M_r(nbpt , m , nb_couche , M_r_theta , M_phi);

% Appel de la fonction de construction de la matrice des rayons horizontaux aux mi- ...
    epaisseur au niveau des plateaux vertebraux
[M_r_pv] = fonction_M_r_pv(nb_couche , M_R , M_r_phi , M_phi_pvs , M_phi_pvi);

cd ..
else
    cd decalage_directionnel
    %[...] Code masque car option non utilisee pour l'article 4

```

```

cd ..

end

if nonlineaire == n
    M_r_phi_s_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r_phi_s;
    M_R_lin(:, :, compteur_membrane) = M_R;
    M_r_phi_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r_phi;
    M_Hpc_lin(:, :, compteur_membrane) = M_Hpc;
    M_phi_s_lin(:, :, compteur_membrane) = M_phi_s;
    M_phi_lin(:, :, compteur_membrane) = M_phi;
    M_phi_pvs_lin(:, :, compteur_membrane) = M_phi_pvs;
    M_phi_pvi_lin(:, :, compteur_membrane) = M_phi_pvi;
    M_r_theta_s_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r_theta_s;
    M_r_s_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r_s;
    M_r_theta_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r_theta;
    M_r_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r;
    M_r_pv_lin(:, :, compteur_membrane) = M_r_pv;

    if decalage_profil == 1

        M_offset_lin(:, :, compteur_membrane) = M_offset(:, :);
        M_CL_lin(1, :, compteur_membrane) = M_CL1x(:, :);
        M_CL_lin(2, :, compteur_membrane) = M_CL1z(:, :);
        M_CL_lin(3, :, compteur_membrane) = M_CL1ry(:, :);
        M_CL_lin(4, :, compteur_membrane) = M_CL2x(:, :);
        M_CL_lin(5, :, compteur_membrane) = M_CL2z(:, :);
        M_CL_lin(6, :, compteur_membrane) = M_CL3x(:, :);
        M_CL_lin(7, :, compteur_membrane) = M_CL3z(:, :);
        M_CL_lin(8, :, compteur_membrane) = M_CL3ry(:, :);

        M_profil_cnt_origine(:, :, compteur_membrane) = M_profil_cnt_origine;
        M_profil_cnt(:, :, compteur_membrane) = M_profil_cnt;
        M_profil_coord_x_origine(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_x_origine;
        M_profil_coord_y_origine(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_y_origine;
        M_profil_coord_z_origine(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_z_origine;
        M_profil_coord_x(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_x;
        M_profil_coord_y(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_y;
        M_profil_coord_z(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_z;
        M_profil_rayons(:, :, compteur_membrane) = M_profil_rayons;
        M_profil_vecteur_tangent_x(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_tangent_x;
        M_profil_vecteur_tangent_y(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_tangent_y;
        M_profil_vecteur_tangent_z(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_tangent_z;
        M_profil_vecteur_normal_x(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_normal_x;
        M_profil_vecteur_normal_y(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_normal_y;
    end
end

```

```

M_profil_vecteur_normal_z(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_normal_z;
M_profil_coord_x_centre_courbure(:, :, compteur_membrane) = ...
    M_profil_coord_x_centre_courbure;
M_profil_coord_y_centre_courbure(:, :, compteur_membrane) = ...
    M_profil_coord_y_centre_courbure;
M_profil_coord_z_centre_courbure(:, :, compteur_membrane) = ...
    M_profil_coord_z_centre_courbure;

M_offset_s_lin(:, :, compteur_membrane) = M_offset_s(:, :);
M_CL_s_lin(1, :, compteur_membrane) = M_CL1x_s(:, :);
M_CL_s_lin(2, :, compteur_membrane) = M_CL1z_s(:, :);
M_CL_s_lin(3, :, compteur_membrane) = M_CL1ry_s(:, :);
M_CL_s_lin(4, :, compteur_membrane) = M_CL2x_s(:, :);
M_CL_s_lin(5, :, compteur_membrane) = M_CL2z_s(:, :);
M_CL_s_lin(6, :, compteur_membrane) = M_CL3x_s(:, :);
M_CL_s_lin(7, :, compteur_membrane) = M_CL3z_s(:, :);
M_CL_s_lin(8, :, compteur_membrane) = M_CL3ry_s(:, :);

M_profil_cnt_origine_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_cnt_origine_s;
M_profil_cnt_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_cnt_s;
M_profil_coord_x_origine_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_x_origine_s;
M_profil_coord_y_origine_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_y_origine_s;
M_profil_coord_z_origine_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_z_origine_s;
M_profil_coord_x_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_x_s;
M_profil_coord_y_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_y_s;
M_profil_coord_z_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_coord_z_s;
M_profil_rayons_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_rayons_s;
M_profil_vecteur_tangent_x_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_tangent_x_s;
M_profil_vecteur_tangent_y_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_tangent_y_s;
M_profil_vecteur_tangent_z_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_tangent_z_s;
M_profil_vecteur_normal_x_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_normal_x_s;
M_profil_vecteur_normal_y_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_normal_y_s;
M_profil_vecteur_normal_z_s(:, :, compteur_membrane) = M_profil_vecteur_normal_z_s;
M_profil_coord_x_centre_courbure_s(:, :, compteur_membrane) = ...
    M_profil_coord_x_centre_courbure_s;
M_profil_coord_y_centre_courbure_s(:, :, compteur_membrane) = ...
    M_profil_coord_y_centre_courbure_s;
M_profil_coord_z_centre_courbure_s(:, :, compteur_membrane) = ...
    M_profil_coord_z_centre_courbure_s;
end
else
    disp('La programmation de la solution non-linéaire n''est pas completee.')
    pause('Appuyez une touche pour continuer.')
end
end

```

```

if compteur == 1
    if decalage_profil == 1 && profil == 4      % Forcer directement M_coord_x_A = ...
        M_profil_coord_x pour assurer une egalite parfaite , sinon difference de l'ordre de ...
        >1e=-12, ce qui est negligeable mais je prefere etre exacte et ne pas ajouter un ...
        calcul inutile
        M_coord_x_A = M_profil_coord_x;
    else
        [M_coord_x_A] = fonction_M_coord_x_A(nb_couche , nbpt , M_R_lin , M_r_phi_lin , ...
            M_phi_lin);
    end
    M_coord_z_A = M_Hpc_lin;
end

%% -----
% Passage au programme de la solution particuliere (solution membrane)

SOLUTION_MEMBRANE

% Fin du programme de calcul des parametres geometriques

```

## Programme de la solution membrane

```

%% Programme qui calcule la solution particuliere (solution membrane) pour l'etude du ...
    mecanisme lesionnel de la hernie discale (inclue la solution isotrope et anisotrope)

% Projet de doctorat , Ecole de technologie superieure
% Departement de genie mecanique
% Copyright Sebastien Demers, ing.

%% -----
% ----- Suppression des matrices de la solution -----
% -----(necessaire pour l'iteration de la solution non-lineaire)-----

clear M_p
clear M_N_phi_m
clear M_N_theta_m

%% Declaration des variables
syms o O n N

disp('Evaluation de la solution membrane...')
disp('_')

%% -----
% ----- Chargements -----

% Construction de la matrice des pressions
% On pose l'hypothese que sous l'effet d'une force de compression, la pression intra- ...
    discale augmente jusqu'a ce que la force  $\pi() \cdot r_{np}^2 \cdot p_{np}$  compense la force W.
facteur_convergence = 1;
pnp = 1.94;
pnp = pnp/facteur_convergence % Pour les essais de convergence pour l'analyse de ...
    discontinuites (determination de la pression maximale assurant de petites deformations ...
    avec la solution membrane)
pnp = pnp*nb_couche/24; % Pour ajuster a une valeur realiste si pas 24 couches
pnp_totale = pnp;

% Calcul de la force axiale dans le cas ou seule la pression intradiscale est simulee
W = pnp*( $\pi()$ *M_r_s(1,1)^2); % Utiliser M_r_s(1,1) au lieu de rnp permet de recalculer w ...
    correctement lors des iterations des grands déplacements
w = W/( $\pi()$ *M_r_s(1,nb_couche+1)^2);

% Subdivision de la pression pour la superposition de cas a faibles déplacements pour la ...
    solution de discontinuite

```

```

if discontinuities == 0 && grand_dep == 0
    pnp = pnp/nb_subload;
    w = w/nb_subload;
    disp('_')
    disp(['Vous_avez_choisi_de_considerer_les_grands_deplacements_a_1''aide_de_', ...
          num2str(nb_subload), '_sous-charges.']);
    disp(['La_pression_totale_de_', num2str(pnp_totale), '_MPa_sera_donc_subdivisee_en_', ...
          num2str(nb_subload), '_pressions_de_', num2str(pnp), '_MPa.']);
end

pext = 0;          % Pression a l'exterieur de l'anneau fibreux (MPa)

%% -----
% ----- Matrices des inconnues -----

% Appel de la fonction de distribution des pressions si l'option a ete demandee
if option_pression == 1
    disp('Estimation_des_pressions_de_contact_par_une_distribution_de_Lame...')
    M_p = fonction_M_p_realiste(m, nb_couche, pnp, pext, M_r_theta_s_lin(:, :, ...
        compteur_membrane), M_t);
elseif option_pression == 2 % Les pressions de contact sont traitees comme des inconnues
    % Construction de la matrice des pressions
    for i=1:l:m
        for j=1:l:nb_couche+1
            variable = ['p_', num2str(i), '_', num2str(j)];
            variable=sym(variable);
            M_p(i,j) = variable;
        end
    end
    for i=1:l:m
        M_p(i,1) = pnp;          % Pression intra-discale
        M_p(i,nb_couche+1) = pext; % Pression externe
    end
end

% Construction de la matrice des forces lineiques en phi
for i=1:l:m
    for j=1:l:nb_couche
        variable = ['N_phi_m_', num2str(i), '_', num2str(j)];
        variable=sym(variable);
        M_N_phi_m(i,j) = variable;
    end
end
end

```

```

% Construction de la matrice des forces lineiques en theta
for i=1:1:m
    for j=1:1:nb_couche
        variable = [ 'N_theta_m_', num2str(i), '_ ', num2str(j) ];
        variable=sym(variable);
        M_N_theta_m(i,j) = variable;
    end
end

%% -----
% -----Calcul de la longueur infinie (selon la theorie de discontinuite)-----

M_l_infinie = zeros(nbpt,nb_couche);
if anisotrope == n || anisotrope == o % Non verifie si anisotrope
    M_xi = zeros(nbpt,nb_couche);
    for j=1:1:nb_couche
        t_temp = M_t(1,j);
        for i=1:1:nbpt
            r_theta_temp = M_r_theta(i,j);
            xi_temp = (3*(1-v^2))^( -1/4)/sqrt(r_theta_temp*t_temp);
            M_xi(i,j) = xi_temp;
            l_infinie_temp = pi()/xi_temp;
            M_l_infinie(i,j) = l_infinie_temp;
        end
    end
end

%% -----
% ----- Systeme d'equations -----

disp(['Construction du systeme d\'equations pour ', num2str((3*nb_couche-1)*m), ' inconnues. ...
      Veuillez patienter ...'])
disp(' ')

% Construction de la matrice d'equations d'equilibre (nbpt x 1) et de la matrice d'equations ...
% membranes (nbpt x nb_couche)
for i=1:1:m
    somme_N_phi = 0;
    for j=1:1:nb_couche
        r_temp = M_r(i,j);
        phi_temp = M_phi(i,j);
        somme_N_phi = somme_N_phi + r_temp*sin(phi_temp)*M_N_phi_m(i,j);
    end
    M_somme_N_phi(i,1) = somme_N_phi;
end

```

**end**

```
for i=1:1:m
    somme_N_phi_temp = M_somme_N_phi(i,1);
    M_equilibre(i,1) = M_r_s(i,1)^2*pnf - M_r_s(1,nb_couche+1)^2*w - 2*somme_N_phi_temp; ...
        % Equation d'equilibre
    for j=1:1:nb_couche
        t_temp = M_t(1,j);
        r_temp = M_r(i,j);
        r_pv_temp = M_r_pv(1,j);
        r_phi_temp = M_r_phi(i,j);
        r_theta_temp = M_r_theta(i,j);
        phi_temp = M_phi(i,j);
        M_membrane(i,j) = M_N_phi_m(i,j)/r_phi_temp + M_N_theta_m(i,j)/r_theta_temp - (M_p( ...
            i,j) - M_p(i,j+1)); % Equation des membranes
    end
end
```

M\_N\_rad\_m = **zeros**(m,nb\_couche);

*% Construction de la matrice des deformations longitudinales (loi de Hooke)*

```
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        if anisotrope == n
            M_eps_phi(i,j) = 1/(E*M_t(1,j))*(M_N_phi_m(i,j) - v*(M_N_theta_m(i, ...
                j) + M_N_rad_m(i,j)));
        else
            M_eps_phi(i,j) = 1/M_t(1,j) * (S_barre(2,1,j)*M_N_theta_m(i,j) + ...
                S_barre(2,2,j)*M_N_phi_m(i,j));
        end
    end
end
```

*% Construction de la matrice des deformations circonferentielles (loi de Hooke)*

```
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        if anisotrope == n
            M_eps_theta(i,j) = 1/(E*M_t(1,j))*(M_N_theta_m(i,j) - v*(M_N_phi_m( ...
                i,j) + M_N_rad_m(i,j)));
        else
            M_eps_theta(i,j) = 1/M_t(1,j) * (S_barre(1,1,j)*M_N_theta_m(i,j) + ...
                S_barre(1,2,j)*M_N_phi_m(i,j));
        %dr_m_temp = (r_theta_temp)*sin(phi_temp) / t_temp * (S_barre(1,1,j)* ...
            N_theta_m_temp + S_barre(1,2,j)*N_phi_m_temp);
    end
end
```



```

        end

    end

end

M_Omega = zeros(m,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        M_Omega(i,j) = pi()/2-M_phi(i,j);
    end
end

M_Omega_s = zeros(m,nb_couche+1);
for j=1:1:nb_couche+1
    for i=1:1:m
        M_Omega_s(i,j) = pi()/2-M_phi_s(i,j);
    end
end

M_Hps = zeros(m+1,1); % Matrice de position des plans de separation
M_Hps(1,1) = M_Hpc(1,1);
M_Hps(m+1,1) = M_Hpc(m,1);
for i=2:1:m
    M_Hps(i,1) = (M_Hpc(i-1,1) + M_Hpc(i,1)) / 2;
end

M_h = zeros(m,1);
for i=1:1:m
    M_h(i,1) = M_Hps(i,1) - M_Hps(i+1,1);
end

if anisotrope == n
    % Transformation des contraintes (pseudo etat 3D de contraintes)
    for j=1:1:nb_couche
        for i=1:1:m
            M_N_x_m(i,j) = (M_N_rad_m(i,j) + M_N_phi_m(i,j))/2 + (M_N_rad_m(i,j) ...
                ) - M_N_phi_m(i,j))/2*cos(-2*M_Omega(i,j)); % Le ...
            cisaillement N_rad_phi est nul
            M_N_y_m(i,j) = M_N_theta_m(i,j);
            M_N_z_m(i,j) = (M_N_rad_m(i,j) + M_N_phi_m(i,j))/2 - (M_N_rad_m(i,j) ...
                ) - M_N_phi_m(i,j))/2*cos(-2*M_Omega(i,j));
            M_N_xz_m(i,j) = -(M_N_rad_m(i,j) - M_N_phi_m(i,j))/2*sin(-2*M_Omega ...
                (i,j));
        end
    end
end

```

```

% Construction des matrices des deformations horizontales et verticales
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        M_eps_x(i,j) = 1/(E*M_t(1,j))*(M_N_x_m(i,j) - v*(M_N_y_m(i,j) + ...
            M_N_z_m(i,j)));
        M_eps_y(i,j) = 1/(E*M_t(1,j))*(M_N_y_m(i,j) - v*(M_N_x_m(i,j) + ...
            M_N_z_m(i,j)));
        M_eps_z(i,j) = 1/(E*M_t(1,j))*(M_N_z_m(i,j) - v*(M_N_x_m(i,j) + ...
            M_N_y_m(i,j)));
    end
end

% Construction de la matrice d'equations de compatibilite des déplacements
% verticaux (m x (nb_couche - 1))

for j=1:1:nb_couche
    somme_dh_temp = M_eps_z(m,j)*M_h(m,1);
    M_somme_dh(m,j) = somme_dh_temp;
    for i=m-1:-1:2
        somme_dh_temp = somme_dh_temp + M_eps_z(i,j)*M_h(i,1)/2;    % ...
        Allongement jusqu'au point i
        M_somme_dh(i,j) = somme_dh_temp;
        somme_dh_temp = somme_dh_temp + M_eps_z(i,j)*M_h(i,1)/2;    % ...
        Allongement jusqu'a l'intervalle dH(i+1)
    end
    M_somme_dh(1,j) = somme_dh_temp + M_eps_z(1,j)*M_h(1,1);
end

for j=2:1:nb_couche
    for i=1:1:m-1
        M_comp_geom_vert(i,j-1) = (M_somme_dh(i,j)) - (M_somme_dh(i,1));
    end
    M_comp_geom_vert(m,j-1) = M_eps_z(m,j) - M_eps_z(m,1);
end

% ***** Si anisotrope *****
else %solution anisotrope
    % Angles entre le plan transversal de symetrie et les points aux intersection des ...
    plans de separation
    M_Omega_ps = zeros(m+1,nb_couche);
    for j=1:1:nb_couche
        for i=1:1:m+1
            M_Omega_ps(i,j) = asin(M_Hps(i,1)/M_r_phi(i,j));
        end
    end

```

```

end

M_upsilon = zeros(m,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        M_upsilon(i,j) = M_Omega_ps(i,j) - M_Omega_ps(i+1,j);
    end
end

M_upsilon_prime = zeros(m,nb_couche);
M_somme_upsilon = zeros(m+1,nb_couche);
somme_upsilon_temp = 0;
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        for ii=i:1:m
            somme_upsilon_temp = somme_upsilon_temp + M_upsilon(ii,j);
        end
        M_somme_upsilon(i,j) = somme_upsilon_temp;
        somme_upsilon_temp = 0;
    end
    for i=1:1:m
        M_upsilon_prime(i,j) = M_Omega(i,j) - M_somme_upsilon(i+1,j);
    end
end

% Construction de la matrice d'equations de compatibilite des déplacements ...
% verticaux (m x (nb_couche - 1))

somme_dupsilon_temp = 0;
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        for ii=i:1:m
            somme_dupsilon_temp = somme_dupsilon_temp + M_upsilon(ii,j) ...
                *M_eps_phi(ii,j);
        end
        M_somme_dupsilon(i,j) = somme_dupsilon_temp;
        somme_dupsilon_temp = 0;
    end
end

for j=1:1:nb_couche
    M_H_finale(1,j) = M_r_phi(1,j)*(sin(M_Omega(1,j))+M_somme_dupsilon(1,j)*cos ...
        (M_Omega(1,j)));
    for i=2:1:m-1

```

```

        M_H_finale(i,j) = M_r_phi(i,j)*(sin(M_Omega(i,j))+ (M_upsilon_prime ...
            (i,j)*M_eps_phi(i,j) + M_somme_dupsilon(i+1,j))*cos(M_Omega(i,j) ...
            )));

    end

end

if nb_couche > 1      % Si une seule couche, ne doit pas utiliser les conditions ...
    de compatibilite geometrique
    for j=2:1:nb_couche
        for i=1:1:m-1
            M_comp_geom_vert(i,j-1) = M_H_finale(i,j) - M_H_finale(i,1) ...
                ;

        end
        M_comp_geom_vert(m,j-1) = M_eps_phi(m,j) - M_eps_phi(m,1);

    end

end

end

if nb_couche > 1      % Si une seule couche, ne doit pas utiliser les conditions de ...
    compatibilite geometrique
    % Construction de la matrice d'equations de compatibilite des déplacements ...
    horizontaux (m x (nb_couche - 1))
    for i=1:1:m
        for j=1:1:nb_couche-1
            M_comp_geom_hor(i,j) = M_r_theta(i,j)*M_eps_theta(i,j)*cos(M_Omega(i,j)) - ...
                M_r_theta(i,j+1)*M_eps_theta(i,j+1)*cos(M_Omega(i,j+1));

        end

    end

end

end

% Evaluation des fractions en nombres decimals (necessaires pour le solve car les fractions ...
% comportent un nombre astronomique de chiffres!!!)
if option_pression == 2
    M_p = vpa(M_p,4);
end
M_equilibre = vpa(M_equilibre,4);
M_membrane = vpa(M_membrane,4);
if nb_couche > 1      % Si une seule couche, ne doit pas utiliser les conditions de ...
    compatibilite geometrique
        M_comp_geom_vert = vpa(M_comp_geom_vert,4);
        M_comp_geom_hor = vpa(M_comp_geom_hor,4);

end

%% -----
% ----- Solution -----

```

```

% Ecriture des arguments pour la commande "solve"
if option_pression == 1 % La distribution des pressions de contact est imposee et une des ...
    conditions de compatibilite n'est plus necessaire.
    commande = 'SOLUTION=solve(';
    for i=1:1:m
        %commande = [commande, 'M_equilibre(' , num2str(i) , ', ', num2str(1) , ') , '];
        commande = [commande, 'M_equilibre(' , num2str(i) , ', 1) , '];
    end
    if nb_couche > 1
        for j=1:1:nb_couche
            for i=1:1:m
                commande = [commande, 'M_membrane(' , num2str(i) , ', ', num2str(j) , ') , '];
            end
        end
        if nb_couche > 2
            for j=1:1:nb_couche-2
                for i=1:1:m
                    commande = [commande, 'M_comp_geom_hor(' , num2str(i) , ', ', num2str(j) , ') , ' ...
                        ];
                end
            end
            for i=1:1:m-1
                commande = [commande, 'M_comp_geom_hor(' , num2str(i) , ', ', num2str(nb_couche-1) , ') , ' ...
                    '];
            end
            commande = [commande, 'M_comp_geom_hor(' , num2str(m) , ', ', num2str(nb_couche-1) , ') , '];
        else
            for j=1:1:nb_couche
                for i=1:1:m-1
                    commande = [commande, 'M_membrane(' , num2str(i) , ', ', num2str(j) , ') , '];
                end
                commande = [commande, 'M_membrane(' , num2str(m) , ', ', num2str(j) , ') , '];
            end
        end
    elseif option_pression == 2 % Les pressions de contact sont des inconnues a resoudre et ...
        necessitent l'utilisation de deux conditions de compatibilite
        commande = 'SOLUTION=solve(';
        for i=1:1:m
            commande = [commande, 'M_equilibre(' , num2str(i) , ', 1) , '];
        end
        if nb_couche > 1
            for j=1:1:nb_couche

```

```

    for i=1:1:m
        commande = [commande, 'M_membrane(' , num2str(i) , ',' , num2str(j) , ') , '];
    end
end
for j=1:1:nb_couche-1
    for i=1:1:m
        commande = [commande, 'M_comp_geom_vert(' , num2str(i) , ',' , num2str(j) , ') , '];
    end
end
if nb_couche > 2
    for j=1:1:nb_couche-2
        for i=1:1:m
            commande = [commande, 'M_comp_geom_hor(' , num2str(i) , ',' , num2str(j) , ') , ' ...
                ];
        end
    end
end
for i=1:1:m-1
    commande = [commande, 'M_comp_geom_hor(' , num2str(i) , ',' , num2str(nb_couche-1) , ') , ...
        '];
end
commande = [commande, 'M_comp_geom_hor(' , num2str(m) , ',' , num2str(nb_couche-1) , ') , '];
else
    for j=1:1:nb_couche
        for i=1:1:m-1
            commande = [commande, 'M_membrane(' , num2str(i) , ',' , num2str(j) , ') , '];
        end
        commande = [commande, 'M_membrane(' , num2str(m) , ',' , num2str(j) , ') , '];
    end
end
end

disp([' Resolution_du_systeme_d''equations_pour_' , num2str((3*nb_couche-1)*m) , '_inconnues.' ...
    Veuillez_patienter...'])
disp('_')
eval(commande) % Execution de la commande solve

% Entree des resultats dans les matrices
for i=1:1:m
    for j=1:1:nb_couche
        sol_N_phi_m = ['SOLUTION.N_phi_m_' , num2str(i) , '_' , num2str(j) ];
        sol_N_theta_m = ['SOLUTION.N_theta_m_' , num2str(i) , '_' , num2str(j) ];
        M_N_phi_m(i,j) = eval(sol_N_phi_m);
        M_N_theta_m(i,j) = eval(sol_N_theta_m);
    end
end

```

```

        end
    end
    if option_pression == 2
        for i=1:1:m
            for j=2:1:nb_couche
                sol_p = [ 'SOLUTION.p_', num2str(i), '_ ', num2str(j) ];
                M_p(i,j) = eval(sol_p);
            end
        end
    end

    end

    end

    % Ajustement des chiffres significatifs
    M_N_phi_m = vpa(M_N_phi_m,4);
    M_N_theta_m = vpa(M_N_theta_m,4);
    if option_pression == 2
        M_p = vpa(M_p,4);
    end

    M_phi_deg = M_phi.*180/pi();

    for i=1:1:m
        for j=1:1:nb_couche
            t_temp = M_t(1,j);
            phi_temp = M_phi(i,j);
            r_theta_temp = M_r_theta(i,j);
            N_phi_m_temp = M_N_phi_m(i,j);
            N_theta_m_temp = M_N_theta_m(i,j);
            N_rad_m_temp = M_N_rad_m(i,j);
            if anisotrope == n
                dr_m_temp = (r_theta_temp)*sin(phi_temp)/(E*t_temp) * ( ...
                    N_theta_m_temp - v*(N_phi_m_temp));
            else
                dr_m_temp = (r_theta_temp)*sin(phi_temp) / t_temp * (S_barre(1,1,j) ...
                    *N_theta_m_temp + S_barre(1,2,j)*N_phi_m_temp);
            end
        end
        M_dr_m(i,j) = dr_m_temp;
    end

    end

    M_N_rad_m = vpa(M_N_rad_m,4);

    % Conversion des sym en double
    M_N_phi_m = double(M_N_phi_m);
    M_N_theta_m = double(M_N_theta_m);
    M_N_rad_m = double(M_N_rad_m);

```

```

if option_preSSION == 2
    M_p = double(M_p);
end
M_dr_m = double(M_dr_m);

for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m-1
        M_p(nbpt+1-i,j) = M_p(i,j);           %Symetrisation de la solution
        M_dr_m(nbpt+1-i,j) = M_dr_m(i,j);       %Symetrisation de la solution
    end
end

M_S_phi_m = zeros(nbpt,nb_couche);
M_S_theta_m = zeros(nbpt,nb_couche);
M_S_rad_m = zeros(nbpt,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    t_temp = M_t(1,j);
    for i=1:1:m-1
        M_S_phi_m(i,j) = M_N_phi_m(i,j)/t_temp;
        M_S_phi_m(nbpt+1-i,j) = M_N_phi_m(i,j)/t_temp;           %Symetrisation de la ...
                               solution
        M_S_theta_m(i,j) = M_N_theta_m(i,j)/t_temp;
        M_S_theta_m(nbpt+1-i,j) = M_N_theta_m(i,j)/t_temp;       %Symetrisation de ...
                               la solution
        M_S_rad_m(i,j) = M_N_rad_m(i,j)/t_temp;
        M_S_rad_m(nbpt+1-i,j) = M_N_rad_m(i,j)/t_temp;           %Symetrisation de la ...
                               solution
    end
    M_S_phi_m(m,j) = M_N_phi_m(m,j)/t_temp;
    M_S_theta_m(m,j) = M_N_theta_m(m,j)/t_temp;
    M_S_rad_m(m,j) = M_N_rad_m(m,j)/t_temp;
end

% Pour conserver les resultats dans des matrices 3D

if nonlineaire == n
    M_h_lin(:,1,compteur_membrane) = M_h;
    M_Hps_lin(:,1,compteur_membrane) = M_Hps;
    M_N_phi_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_N_phi_m;
    M_N_theta_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_N_theta_m;
    M_N_rad_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_N_rad_m;
    M_p_lin(:, :, compteur_membrane) = M_p;
    M_dr_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_dr_m;
    M_S_phi_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_S_phi_m;

```



```

    M_S_theta_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_S_theta_m;
    M_S_rad_m_lin(:, :, compteur_membrane) = M_S_rad_m;
    M_Omega_lin(:, :, compteur_membrane) = M_Omega;

    if discontinuities == n
        [M_coord_x_B_m_lin(:, :, compteur_membrane)] = fonction_M_coord_x_B_m(nb_couche, nbpt ...
            , M_coord_x_A, M_dr_m_lin(:, :, compteur_membrane));
        % M_coord_x_B_m_lin ne sert pas a la solution de discontinuities mais il est calcule ...
        % pour fins de validation du code
    elseif compteur_subload == 0
        [M_coord_x_B_m_lin(:, :, compteur_membrane)] = fonction_M_coord_x_B_m(nb_couche, nbpt ...
            , M_coord_x_A, M_dr_m_lin(:, :, compteur_membrane));
    elseif compteur_membrane < nb_it_grand_dep
        [M_coord_x_B_m_lin(:, :, compteur_membrane)] = fonction_M_coord_x_B_m(nb_couche, nbpt ...
            , M_coord_x_B_m_lin_discont(:, :, compteur_subload), M_dr_m_lin(:, :, ...
            compteur_membrane));
    else
        [M_coord_x_B_m_lin(:, :, compteur_membrane)] = fonction_M_coord_x_B_m(nb_couche, nbpt ...
            , M_coord_x_B_t_lin_discont(:, :, compteur_subload), M_dr_m_lin(:, :, ...
            compteur_membrane));
    end
    if anisotrope == n
        [M_coord_z_B_m_lin_iso(:, :, compteur_membrane)] = fonction_M_coord_z_B_m_iso ...
            (m, nbpt, nb_couche, M_phi_lin(:, :, compteur_membrane), M_phi_s_lin(:, :, ...
            compteur_membrane), M_N_rad_m_lin(:, :, compteur_membrane), M_N_phi_m_lin ...
            (:, :, compteur_membrane), M_N_theta_m_lin(:, :, compteur_membrane), ...
            E_fort_moyen, v, M_t, M_h_lin(:, :, compteur_membrane), M_Hpc_lin(:, :, ...
            compteur_membrane));
    else
        [M_coord_z_B_m_lin_aniso(:, :, compteur_membrane)] = fonction_M_coord_z_B_m_aniso(m, ...
            nbpt, nb_couche, M_t, S_barre, M_N_phi_m_lin(:, :, compteur_membrane), ...
            M_N_theta_m_lin(:, :, compteur_membrane), M_Hps_lin(:, :, compteur_membrane), ...
            M_r_phi_lin(:, :, compteur_membrane), M_Omega_lin(:, :, compteur_membrane), ...
            M_Hpc_lin(:, :, compteur_membrane));
    end
end

%% Enregistrement du temps de calcul

M_telapsed(1,1,compteur_membrane) = toc(tstart);
if compteur_membrane == 1
    M_telapsed_diff(1,1,compteur_membrane) = M_telapsed(1,1,compteur_membrane);
else

```

```

M_telapsed_diff(1,1,compteur_membrane) = M_telapsed(1,1,compteur_membrane) - M_telapsed ...
(1,1,compteur_membrane -1);
end

%% -----
% ----Passage au prochain programme

if convergence_membrane == 1
    M_S_theta_m_convergence(1,it_convergence) = M_S_theta_m_lin(m,1,compteur_membrane)
    if it_convergence == 1
        it_convergence = it_convergence + 1;
        GEOM_GRAND_DEP_membrane
    else
        M_diff_S_theta_m_convergence(1,it_convergence - 1) = (M_S_theta_m_convergence(1, ...
            it_convergence) - M_S_theta_m_convergence(1,it_convergence - 1))/ ...
            M_S_theta_m_convergence(1,it_convergence - 1)*100
        EXPORT
    end
else
    if grand_dep == 0 && it_grand_dep < nb_it_grand_dep % && discontinuities == n
        GEOM_GRAND_DEP_membrane
    elseif discontinuities == 0
        SOLUTION_DISCONT
    elseif nonlineaire == 0 && it_nonlin == 0
        NONLINEAIRE
    else
        EXPORT
    end
end

% Fin du programme de la solution membrane

```

## Programme de la solution des effets de discontinuité

```

%% Programme qui calcule les contraintes de discontinuités aux extrémités d'un disque ...
    intervertebral axisymétrique multicouche soumis à une force de compression uniaxiale.

% Projet de doctorat, Ecole de technologie supérieure
% Département de génie mécanique
% Copyright Sébastien Demers, ing.

%% -----
% ----- Initialisation -----

% Rien à initialiser. Doit utiliser les données en mémoire.

disp('Execution de l\'analyse de discontinuités...')
disp('_')

%% -----
% ----- Declaration des variables -----

syms V0
syms z
syms o O n N M_UVE F_UVE M_LVE F_LVE E_discont_iso facteur_attenuation

compteur_subload = compteur_subload + 1;

%% Sauvegarde de la dernière solution membrane (les données des itérations précédant ...
    nb_it_grand_dep seront écrasées).
if nonlineaire == n
    M_r_phi_s_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_phi_s_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
        1);
    M_R_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_R_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_r_phi_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_phi_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_Hpc_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_Hpc_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_Hps_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_Hps_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_phi_s_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_phi_s_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_phi_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_phi_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_phi_pvs_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_phi_pvs_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
        1);
    M_phi_pvi_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_phi_pvi_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
        1);
    M_r_theta_s_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_theta_s_lin(:, :, nb_it_grand_dep ...
        + 1);
    M_r_s_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_s_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);

```

```

M_r_theta_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_theta_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);
M_r_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_r_pv_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_r_pv_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_Omega_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_Omega_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);

M_h_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_h_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_N_phi_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_N_phi_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);
M_N_theta_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_N_theta_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep ...
    + 1);
M_N_rad_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_N_rad_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);
M_p_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_p_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_dr_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_dr_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_S_phi_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);
M_S_theta_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep ...
    + 1);
M_S_rad_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_S_rad_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);

M_coord_x_B_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_coord_x_B_m_lin(:, :, nb_it_grand_dep ...
    + 1);
if anisotrope == n
    M_coord_z_B_t_lin_iso_discont(:, :, compteur_subload) = M_coord_z_B_m_lin_iso ...
        (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    H_actuelle = M_coord_z_B_t_lin_iso_discont(1,1,compteur_subload) - ...
        M_coord_z_B_t_lin_iso_discont(nbpt,1,compteur_subload);
else
    M_coord_z_B_t_lin_aniso_discont(:, :, compteur_subload) = M_coord_z_B_m_lin_aniso ...
        (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    H_actuelle = M_coord_z_B_t_lin_aniso_discont(1,1,compteur_subload) - ...
        M_coord_z_B_t_lin_aniso_discont(nbpt,1,compteur_subload);
end

M_telapsed_discont(:, :, compteur_subload) = M_telapsed(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_telapsed_diff_discont(:, :, compteur_subload) = M_telapsed_diff(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);

if decalage_profil == 1
    M_offset_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_offset_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
    M_CL_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_CL_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1);    % ...
    Matrice des conditions limites

```

```

M_profil_cnt_origine_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_cnt_origine(:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_cnt_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_cnt(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_x_origine_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_x_origine ...
    (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_y_origine_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_y_origine ...
    (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_z_origine_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_z_origine ...
    (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_x_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_x(:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_y_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_y(:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_z_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_z(:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_rayons_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_rayons(:, :, nb_it_grand_dep ...
    + 1);
M_profil_vecteur_tangent_x_discont(:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_tangent_x(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_tangent_y_discont(:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_tangent_y(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_tangent_z_discont(:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_tangent_z(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_normal_x_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_vecteur_normal_x ...
    (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_normal_y_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_vecteur_normal_y ...
    (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_normal_z_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_vecteur_normal_z ...
    (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_x_centre_courbure_discont(:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_x_centre_courbure(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_y_centre_courbure_discont(:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_y_centre_courbure(:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_z_centre_courbure_discont(:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_z_centre_courbure(:, :, nb_it_grand_dep + 1);

M_offset_s_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_offset_s_lin(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);
M_CL_s_lin_discont(:, :, compteur_subload) = M_CL_s_lin(:, :, nb_it_grand_dep + 1); ...
    % Matrice des conditions limites
M_profil_cnt_origine_s_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_cnt_origine_s(:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_cnt_s_discont(:, :, compteur_subload) = M_profil_cnt_s(:, :, nb_it_grand_dep + ...
    1);

```

```

M_profil_coord_x_origine_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_x_origine_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_y_origine_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_y_origine_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_z_origine_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_z_origine_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_x_s_discont (:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_x_s (:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_y_s_discont (:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_y_s (:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_z_s_discont (:, :, compteur_subload) = M_profil_coord_z_s (:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_rayons_s_discont (:, :, compteur_subload) = M_profil_rayons_s (:, :, ...
    nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_tangent_x_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_tangent_x_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_tangent_y_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_tangent_y_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_tangent_z_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_tangent_z_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_normal_x_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_normal_x_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_normal_y_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_normal_y_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_vecteur_normal_z_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_vecteur_normal_z_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_x_centre_courbure_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_x_centre_courbure_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_y_centre_courbure_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_y_centre_courbure_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);
M_profil_coord_z_centre_courbure_s_discont (:, :, compteur_subload) = ...
    M_profil_coord_z_centre_courbure_s (:, :, nb_it_grand_dep + 1);

end
end

%% Cas ou le plateau vertebraal est rigide (par hypothese)

% Verification numerique des déplacements radiaux

% Initialisation des matrices
if compteur_subload == 1
    M_dr_pvs_m_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
    M_dr_pvi_m_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);

```

```

M_dr_pvs_t_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);    % Deplacement resultant ( ...
    total) du point d'attache dans le plateau vertebraal superieur
M_dr_pvi_t_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
M_dr_pvs_d_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
M_dr_pvi_d_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
M_rot_pvs_t_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
M_rot_pvi_t_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
end

% evaluation des deplacements
M_dr_pvs_m_lin_discont(1,:,compteur_subload) = M_dr_m_lin_discont(1,:,compteur_subload); ...
    % Deplacement horizontal de la solution membrane au niveau du plateau vertebraal ...
    superieur
M_dr_pvi_m_lin_discont(1,:,compteur_subload) = M_dr_m_lin_discont(nbpt,:,compteur_subload);
M_dr_pvs_d_lin_discont(1,:,compteur_subload) = M_dr_pvs_t_lin_discont(1,:,compteur_subload) ...
    - M_dr_pvs_m_lin_discont(1,:,compteur_subload); % Deplacement de la solution de ...
    discontinuite du point d'attache dans le plateau vertebraal superieur
M_dr_pvi_d_lin_discont(1,:,compteur_subload) = M_dr_pvi_t_lin_discont(1,:,compteur_subload) ...
    - M_dr_pvi_m_lin_discont(1,:,compteur_subload);
M_rot_pvs_d_lin_discont(1,:,compteur_subload) = M_rot_pvs_t_lin_discont(1,:, ...
    compteur_subload);
M_rot_pvi_d_lin_discont(1,:,compteur_subload) = M_rot_pvi_t_lin_discont(1,:, ...
    compteur_subload);

% Boucle de calcul du parametre d'elancement lambda
if compteur_subload == 1
    M_lambda_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
end

for j=1:1:nb_couche
    t_temp = M_t(1,j);
    somme_lambda = 0;
    R_temp = M_R_lin_discont(m,j,compteur_subload);
    r_phi_temp = M_r_phi_lin_discont(m,j,compteur_subload);
    r_theta_temp = M_r_theta_lin_discont(m,j,compteur_subload);
    lambda_temp = (3*(1-v^2)*r_phi_temp^4/(r_theta_temp^2*t_temp^2))^(1/4);
    M_lambda_lin_discont(1,j,compteur_subload) = lambda_temp;    % Lambda au plan ...
    transversal de symetrie
end

if bloquer_rotations == 1
    % Boucle d'estimation des conditions frontieres
    % Ce calcul est fonde sur l'hypothese que la premiere lamelle agit comme etant ...
    totalement encastree et que la lamelle exterieure peut tourner librement.

```

```

% La condition frontiere des lamelles 2 a nb_couche-1 est interpole lineairement entre ...
% ces deux conditions limites extremes.
% Il s'agit dans un premier temps d'evaluer la force annulaire agissant sur la derniere ...
% lamelle en posant que le moment de discontinuite est nul.
% Avec la force annulaire obtenue, on evalue la rotation de la derniere lamelle.
% Finalement, on interpole lineairement les rotations des lamelles 2 a nb_couche-1 a ...
% partir de la rotation bloquee a la lamelle 1 et de la rotation calculee a la ...
% derniere lamelle.

dr_total_z0_lamelle_externe_temp = M_dr_total_impose(1,nb_couche,compteur_subload) ...
% Deplacement total a z0 impose a la lamelle exterieure pour le subload en cours ( ...
% calcule dans le programme PROP_MEC_ANISO.m car utilise pour la solution anisotrope ...
% seulement.

dr_m_lin_discont_z0_temp = M_dr_m_lin_discont(m,nb_couche,compteur_subload) % ...
% Deplacement calcule par la solution membrane

dr_d_lin_discont_z0_impose_lamelle_externe_temp = dr_total_z0_lamelle_externe_temp - ...
dr_m_lin_discont_z0_temp

t_temp = M_t(1,nb_couche);
M_N_theta_m_lin_discont_pvs_temp = M_N_theta_m_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload ...
)
M_N_theta_m_lin_discont_pvi_temp = M_N_theta_m_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload ...
)
r_phi_pvs_temp = M_r_phi_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload);
r_phi_z0_temp = M_r_phi_lin_discont(m,nb_couche,compteur_subload);
r_phi_pvi_temp = M_r_phi_lin_discont(nbpt,nb_couche,compteur_subload);

r_theta_pvs_temp = M_r_theta_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload);
r_theta_z0_temp = M_r_theta_lin_discont(m,nb_couche,compteur_subload);
r_theta_pvi_temp = M_r_theta_lin_discont(nbpt,nb_couche,compteur_subload);

phi_pvs_temp = M_phi_pvs_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload);
phi_z0_temp = pi/2;
phi_pvi_temp = M_phi_pvi_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload);

lambda_temp = M_lambda_lin_discont(1,nb_couche,compteur_subload);
phi_temp = phi_pvs_temp; % On est a phi = phi_pvs
PSI_UVE_UVE_temp = phi_temp - phi_pvs_temp; % Psi du pvs evalue au pvs (=0)
PSI_LVE_UVE_temp = phi_pvi_temp - phi_temp; % Psi du pvi evalue au pvs
phi_temp = phi_pvi_temp; % On est a phi = phi_pvi
PSI_UVE_LVE_temp = phi_temp - phi_pvs_temp; % Psi du pvs evalue au pvi
PSI_LVE_LVE_temp = phi_pvi_temp - phi_temp; % Psi du pvi evalue au pvi (=0)
phi_temp = phi_z0_temp; % On est a z0

```



```

PSI_UVE_z0_temp = phi_temp - phi_pvs_temp;      % Psi du pvs evalue a z0 (plan ...
          transversal de symetrie)
PSI_LVE_z0_temp = phi_pvi_temp - phi_temp;      % Psi du pvi evalue a z0 (plan ...
          transversal de symetrie)

% Si on ne neglige pas l'effet de F_LVE sur le deplacement au UVE et vice-versa

eq_N_theta_d_lin_discont_pvs_lamelle_externes_temp = -2*(r_theta_pvs_temp/r_phi_pvs_temp ...
) * (lambda_temp*facteur_attenuation)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
PSI_LVE_UVE_temp) ...
      *(F_LVE*sin(phi_pvi_temp)*cos((lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
      PSI_LVE_UVE_temp)) ...
      -2*(r_theta_pvs_temp/r_phi_pvs_temp)*(lambda_temp*facteur_attenuation)*exp(-( ...
      lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_UVE_UVE_temp)*(-F_UVE*sin( ...
      phi_pvs_temp)*cos((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_UVE_UVE_temp));
assume(facteur_attenuation > 0 & facteur_attenuation <= 1)
eq_N_theta_d_lin_discont_pvi_lamelle_externes_temp = -2*(r_theta_pvi_temp/r_phi_pvi_temp ...
) * (lambda_temp*facteur_attenuation)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
PSI_LVE_LVE_temp) ...
      *(F_LVE*sin(phi_pvi_temp)*cos((lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
      PSI_LVE_LVE_temp)) ...
      -2*(r_theta_pvi_temp/r_phi_pvi_temp)*(lambda_temp*facteur_attenuation)*exp(-( ...
      lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_UVE_LVE_temp)*(-F_UVE*sin( ...
      phi_pvs_temp)*cos((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_UVE_LVE_temp));
eq1_temp = vpa(eq_N_theta_d_lin_discont_pvs_lamelle_externes_temp,4) + ...
      M_N_theta_m_lin_discont_pvs_temp;
eq2_temp = vpa(eq_N_theta_d_lin_discont_pvi_lamelle_externes_temp,4) + ...
      M_N_theta_m_lin_discont_pvi_temp;

dr_pvs_d_lin_discont_lamelle_externes_temp = M_dr_pvs_d_lin_discont(1,nb_couche, ...
      compteur_subload);

eq_dr_discont_pvs_lamelle_externes_temp = -sqrt(2)*(lambda_temp*facteur_attenuation)/( ...
      E_discont_iso*t_temp)*(r_theta_pvs_temp^2/r_phi_pvs_temp)*sin(phi_pvs_temp) ...
      *(-sqrt(2)*F_LVE*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
      PSI_LVE_UVE_temp) ...
      *sin((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_LVE_UVE_temp - pi/2) ...
      -sqrt(2)*F_UVE*sin(phi_pvs_temp));
eq3_temp = vpa(eq_dr_discont_pvs_lamelle_externes_temp,4) - ...
      dr_pvs_d_lin_discont_lamelle_externes_temp;

eq_dr_discont_z0_lamelle_externes_temp = -sqrt(2)*(lambda_temp*facteur_attenuation)/( ...
      E_discont_iso*t_temp)*(r_theta_z0_temp^2/r_phi_z0_temp)*sin(phi_z0_temp) ...

```

```

*(-sqrt(2)*F_LVE*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
    PSI_LVE_z0_temp)*sin((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_LVE_z0_temp - pi/2) ...
    ...
+sqrt(2)*F_UVE*sin(phi_pvs_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
    PSI_UVE_z0_temp)*sin((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_UVE_z0_temp - pi/2)) ...
;

eq4_temp = vpa(eq_dr_discont_z0_lamelle_externes_temp,4) - ...
    dr_d_lin_discont_z0_impose_lamelle_externes_temp % Deplacement que doit occasionner ...
    la solution de discontinuities au plan transversal de symetrie

solution_lamelle_externes_temp = solve(eq1_temp,eq2_temp,eq3_temp,eq4_temp,F_UVE,F_LVE, ...
    E_discont_iso,facteur_attenuation,'Real',true)
sol_force_UVE_lamelle_externes_temp = solution_lamelle_externes_temp.F_UVE;
sol_force_LVE_lamelle_externes_temp = solution_lamelle_externes_temp.F_LVE;
sol_E_discont_iso_lamelle_externes_temp = solution_lamelle_externes_temp.E_discont_iso;
sol_facteur_attenuation_temp = solution_lamelle_externes_temp.facteur_attenuation;

force_UVE_lamelle_externes_temp = eval(sol_force_UVE_lamelle_externes_temp);
force_LVE_lamelle_externes_temp = eval(sol_force_LVE_lamelle_externes_temp);
M_E_discont_iso(1,nb_couche,compteur_subload) = eval( ...
    sol_E_discont_iso_lamelle_externes_temp);
M_facteur_attenuation(1,nb_couche,compteur_subload) = eval(sol_facteur_attenuation_temp ...
);
disp(['Lamelle_externes_',_subload_,num2str(compteur_subload)])
disp(['E_discont_iso:',_num2str(M_E_discont_iso(1,nb_couche,compteur_subload)),'_*** ...
    RESOLU***'])
disp(['facteur_attenuation:',_num2str(M_facteur_attenuation(1,nb_couche, ...
    compteur_subload)),'_***RESOLU***'])

M_F_UVE_debug(1,nb_couche,compteur_subload) = force_UVE_lamelle_externes_temp; % Sert ...
    a verifier la coherence des resultats lors du debuggage
M_F_LVE_debug(1,nb_couche,compteur_subload) = force_LVE_lamelle_externes_temp; % Sert ...
    a verifier la coherence des resultats lors du debuggage
disp(['Lamelle_externes_',_subload_,num2str(compteur_subload)])
disp(['F_UVE:',_num2str(M_F_UVE_debug(1,nb_couche,compteur_subload)),'_***RESOLU***'])
disp(['F_LVE:',_num2str(M_F_LVE_debug(1,nb_couche,compteur_subload)),'_***RESOLU***'])

E_discont_iso_lamelle_externes_temp = M_E_discont_iso(1,nb_couche,compteur_subload);
facteur_attenuation_temp = M_facteur_attenuation(1,nb_couche,compteur_subload);

rot_discont_pvs_lamelle_externes_temp = 2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)^2/( ...
    E_discont_iso_lamelle_externes_temp*t_temp)*(r_theta_pvs_temp^2/r_phi_pvs_temp^2) ...

```

```

*(2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_pvs_temp*0*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_UVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_UVE_temp)...
-sqrt(2)*force_LVE_lamelle_externes_temp*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_UVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_UVE_temp - pi/4)...
-2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_pvs_temp*0*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_UVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_UVE_temp)...
-sqrt(2)*force_UVE_lamelle_externes_temp*sin(phi_pvs_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_UVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_UVE_temp - pi/4));
M_rot_discont_pvs_lamelle_externes_debug(1,1,compteur_subload) = ...
    rot_discont_pvs_lamelle_externes_temp; % Sert a verifier la coherence des ...
    resultats lors du debugage
rot_discont_pvi_lamelle_externes_temp = 2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)^2/( ...
    E_discont_iso_lamelle_externes_temp*t_temp)*(r_theta_pvs_temp^2/r_phi_pvs_temp^2)...
*(2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_pvs_temp*0*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_LVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_LVE_temp)...
-sqrt(2)*force_LVE_lamelle_externes_temp*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_LVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_LVE_temp - pi/4)...
-2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_pvs_temp*0*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_LVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_LVE_temp)...
-sqrt(2)*force_UVE_lamelle_externes_temp*sin(phi_pvs_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_LVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
    facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_LVE_temp - pi/4));
M_rot_discont_pvi_lamelle_externes_debug(1,1,compteur_subload) = ...
    rot_discont_pvi_lamelle_externes_temp; % Sert a verifier la coherence des ...
    resultats lors du debugage

% Les valeurs calculees pour les lamelles 2 a 23 sont inutiles car le programme a ete ...
% modifie pour imposer une distribution des moments de discontinuite afin de limiter ...
% le temps de calcul.
M_rot_pvs_d_lin_discont(1,1,compteur_subload) = ratio_rotation_pvs_lamelle_1* ...
    rot_discont_pvs_lamelle_externes_temp;
M_rot_pvi_d_lin_discont(1,1,compteur_subload) = ratio_rotation_pvi_lamelle_1* ...
    rot_discont_pvi_lamelle_externes_temp;
for j=2:1:nb_couche
    rot_pvs_d_lin_discont_temp = M_rot_pvs_d_lin_discont(1,1,compteur_subload) + ( ...
        rot_discont_pvs_lamelle_externes_temp - M_rot_pvs_d_lin_discont(1,1, ...
        compteur_subload))*(j-1)/(nb_couche-1);

```

```

M_rot_pvs_d_lin_discont(1,j,compteur_subload) = rot_pvs_d_lin_discont_temp;
M_rot_pvi_d_lin_discont(1,j,compteur_subload) = -rot_pvs_d_lin_discont_temp;
end

figure('name','Interpolation_des_rotations_au_PVS')
plot(linspace(1,nb_couche,nb_couche),M_rot_pvs_d_lin_discont(:, :, compteur_subload)*180/pi() ...
, 'go-')
hold on
plot(linspace(1,nb_couche,nb_couche),M_rot_pvi_d_lin_discont(:, :, compteur_subload)*180/pi() ...
, 'go-')
xlabel('Lamella_identification_number')
ylabel('Rotation_(deg)')
hold off

end

sym('facteur_attenuation','clear');

% Boucle de calcul des forces et moments annulaires aux regions de discontinuite

if compteur_subload == 1
    M_M_UVE_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
    M_F_UVE_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
    M_M_LVE_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
    M_F_LVE_lin_discont = zeros(1,nb_couche,nb_subload);
end

if bloquer_rotations == 1 % Il faut resoudre pour M_UVE, F_UVE, M_LVE et F_LVE
    %[...] Code masque car option non utilisee pour l'article 4
else % Il faut resoudre pour F_UVE et F_LVE seulement
    j = nb_couche; % Pour commencer a resoudre la derniere couche pour la condition "assume ...
        " entre la premiere et la derniere couche
    compteur_couche = 1;
    while compteur_couche <= nb_couche
        t_temp = M_t(1,j);
        %E_temp = 16.0; % Resultat du programme PROP_MEC_ANISO_OConnell.m pour le module ...
            axial
        E_temp = M_E_phi_eff(1,j);

        dr_total_z0_temp = M_dr_total_impose(1,j,compteur_subload); % Deplacement total ...
            a z0 impose a la lamelle exterieure pour le subload en cours (calcule dans le ...
                programme PROP_MEC_ANISO.m car utilise pour la solution anisotrope seulement.
        dr_m_lin_discont_z0_temp = M_dr_m_lin_discont(m,j,compteur_subload); % ...
            Deplacement calcule par la solution membrane
    end
end

```

```

dr_d_lin_discont_z0_impose_temp = dr_total_z0_temp - dr_m_lin_discont_z0_temp;

M_N_theta_m_lin_discont_pvs_temp = M_N_theta_m_lin_discont(1,j,compteur_subload);
M_N_theta_m_lin_discont_pvi_temp = M_N_theta_m_lin_discont(1,j,compteur_subload);
r_phi_pvs_temp = M_r_phi_lin_discont(1,j,compteur_subload);
r_phi_z0_temp = M_r_phi_lin_discont(m,j,compteur_subload);
r_phi_pvi_temp = M_r_phi_lin_discont(nbpt,j,compteur_subload);

r_theta_pvs_temp = M_r_theta_lin_discont(1,j,compteur_subload);
r_theta_z0_temp = M_r_theta_lin_discont(m,j,compteur_subload);
r_theta_pvi_temp = M_r_theta_lin_discont(nbpt,j,compteur_subload);

phi_pvs_temp = M_phi_pvs_lin_discont(1,j,compteur_subload);
phi_z0_temp = pi/2;
phi_pvi_temp = M_phi_pvi_lin_discont(1,j,compteur_subload);

lambda_temp = M_lambda_lin_discont(1,j,compteur_subload);
phi_temp = phi_pvs_temp;      % On est a phi = phi_pvs
PSI_UVE_UVE_temp = phi_temp - phi_pvs_temp;      % Psi du pvs evalue au pvs (=0)
PSI_LVE_UVE_temp = phi_pvi_temp - phi_temp;      % Psi du pvi evalue au pvs
phi_temp = phi_pvi_temp;      % On est a phi = phi_pvi
PSI_UVE_LVE_temp = phi_temp - phi_pvs_temp;      % Psi du pvs evalue au pvi
PSI_LVE_LVE_temp = phi_pvi_temp - phi_temp;      % Psi du pvi evalue au pvi (=0)
phi_temp = phi_z0_temp;      % On est a z0
PSI_UVE_z0_temp = phi_temp - phi_pvs_temp;      % Psi du pvs evalue a z0 (plan ...
    transversal de symetrie)
PSI_LVE_z0_temp = phi_pvi_temp - phi_temp;      % Psi du pvi evalue a z0 (plan ...
    transversal de symetrie)

assume(facteur_attenuation > 0 & facteur_attenuation <= 1)

dr_pvs_d_lin_discont_temp = M_dr_pvs_d_lin_discont(1,j,compteur_subload);

eq_dr_discont_pvs_temp = -sqrt(2)*(lambda_temp*facteur_attenuation)/(E_temp*t_temp) ...
    *(r_theta_pvs_temp^2/r_phi_pvs_temp)*sin(phi_pvs_temp) ...
    *(-sqrt(2)*F_LVE*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
    PSI_LVE_UVE_temp) ...
    *sin((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_LVE_UVE_temp - pi/2) ...
    -sqrt(2)*F_UVE*sin(phi_pvs_temp));
eq3_temp = vpa(eq_dr_discont_pvs_temp,4) - dr_pvs_d_lin_discont_temp;

eq_dr_discont_z0_temp = -sqrt(2)*(lambda_temp*facteur_attenuation)/(E_temp*t_temp) ...
    *(r_theta_z0_temp^2/r_phi_z0_temp)*sin(phi_z0_temp) ...

```

```

* (-sqrt(2)*F_LVE*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
    PSI_LVE_z0_temp)*sin((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_LVE_z0_temp - pi ...
    /2) ...
+sqrt(2)*F_UVE*sin(phi_pvs_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation)* ...
    PSI_UVE_z0_temp)*sin((lambda_temp*facteur_attenuation)*PSI_UVE_z0_temp - pi ...
    /2));

eq4_temp = vpa(eq_dr_discont_z0_temp,4) - dr_d_lin_discont_z0_impose_temp; % ...
    Deplacement que doit occasionner la solution de discontinuites au plan ...
    transversal de symetrie

eq5_temp = F_LVE + F_UVE

solution_temp = solve(eq3_temp,eq4_temp,eq5_temp,F_UVE,F_LVE,facteur_attenuation,' ...
    Real',true);
sol_force_UVE_temp = solution_temp.F_UVE;
sol_force_LVE_temp = solution_temp.F_LVE;
sol_facteur_attenuation_temp = solution_temp.facteur_attenuation;

M_F_UVE_lin_discont(1,j,compteur_subload) = eval(sol_force_UVE_temp);
M_F_LVE_lin_discont(1,j,compteur_subload) = eval(sol_force_LVE_temp);
M_facteur_attenuation(1,j,compteur_subload) = eval(sol_facteur_attenuation_temp);
disp(['Lamelle_',num2str(j),'_',compteur_subload_',num2str(compteur_subload)])
disp(['facteur_attenuation_',num2str(M_facteur_attenuation(1,j,compteur_subload)), ...
    '***RESOLU***'])
disp(['F_UVE_',num2str(M_F_UVE_lin_discont(1,j,compteur_subload)), '***RESOLU***' ...
    ])
disp(['F_LVE_',num2str(M_F_LVE_lin_discont(1,j,compteur_subload)), '***RESOLU***' ...
    ])

if j==nb_couche
    j = 0;
end
j = j + 1;
compteur_couche = compteur_couche + 1;
end
end

sym('E_discont_iso','clear')
sym('facteur_attenuation','clear')

%[...] Code masque car option non utilisee pour l'article 4

% Boucle de resolution des contraintes de discontinuite

```

```

if compteur_subload == 1
    M_N_phi_d_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_N_theta_d_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_dr_d_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_rot_d_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
end

for j=1:1:nb_couche
    t_temp = M_t(1,j);
    E_temp = M_E_phi_eff(1,j);
    facteur_attenuation_temp = M_facteur_attenuation(1,j,compteur_subload);
    phi_pvs_temp = M_phi_pvs_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    phi_pvi_temp = M_phi_pvi_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    M_UVE_temp = M_M_UVE_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    F_UVE_temp = M_F_UVE_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    M_LVE_temp = M_M_LVE_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    F_LVE_temp = M_F_LVE_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    lambda_temp = M_lambda_lin_discont(1,j,compteur_subload);
    for i = 1:1:nbpt
        r_phi_temp = M_r_phi_lin_discont(i,j,compteur_subload);
        r_theta_temp = M_r_theta_lin_discont(i,j,compteur_subload);
        phi_temp = M_phi_lin_discont(i,j,compteur_subload);
        PSI_UVE_temp = phi_temp - phi_pvs_temp;
        PSI_LVE_temp = phi_pvi_temp - phi_temp;
        % Moments de discontinuite inclus
        M_N_phi_d_lin_discont(i,j,compteur_subload) = -cot(phi_pvi_temp - PSI_LVE_temp)*exp ...
            (-(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp) ...
            *(2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp * M_LVE_temp*sin(( ...
                lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp) ...
            -F_LVE_temp*sin(phi_pvi_temp)*(sin((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)* ...
                PSI_LVE_temp) - cos((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp))) ...
            ...
        +cot(phi_pvs_temp + PSI_UVE_temp)*exp(-(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)* ...
            PSI_UVE_temp)*(2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp * ...
            M_UVE_temp*sin((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp) ...
            +F_UVE_temp*sin(phi_pvs_temp)*(sin((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)* ...
                PSI_UVE_temp) - cos((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)));
        M_N_theta_d_lin_discont(i,j,compteur_subload) = -2*(r_theta_temp/r_phi_temp)*( ...
            lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
                facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp) ...
            *((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp * M_LVE_temp*(sin(( ...
                lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp) - cos((lambda_temp* ...
                    facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp))) ...

```

```

+ F_LVE_temp*sin(phi_pvi_temp)*cos((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)* ...
  PSI_LVE_temp)) ...
-2*(r_theta_temp/r_phi_temp)*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*exp(-( ...
  lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)*((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp * M_UVE_temp*(sin((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp) - cos((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)) ...
- F_UVE_temp*sin(phi_pvs_temp)*cos((lambda_temp*facteur_attenuation_temp)* ...
  PSI_UVE_temp));
M_dr_d_lin_discont(i,j,compteur_subload)=-sqrt(2)*(lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)/(E_temp*t_temp)*(r_theta_temp^2/r_phi_temp)*sin( ...
  phi_temp) ...
*(2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp * M_LVE_temp*exp(-( ...
  lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp)*sin((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp - pi/4) ...
-sqrt(2)*F_LVE_temp*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp)*sin((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp - pi/2) ...
+2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp * M_UVE_temp*exp(-( ...
  lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)*sin((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp - pi/4) ...
+sqrt(2)*F_UVE_temp*sin(phi_pvs_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)*sin((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp - pi/2));
M_rot_d_lin_discont(i,j,compteur_subload) = 2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp ...
  )^2/(E_temp*t_temp)*(r_theta_temp^2/r_phi_temp^2) ...
*(2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp*M_LVE_temp*exp(-( ...
  lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp) ...
-sqrt(2)*F_LVE_temp*sin(phi_pvi_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_LVE_temp - pi/4) ...
-2*(lambda_temp*facteur_attenuation_temp)/r_phi_temp*M_UVE_temp*exp(-( ...
  lambda_temp*facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp) ...
-sqrt(2)*F_UVE_temp*sin(phi_pvs_temp)*exp(-(lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp)*cos((lambda_temp* ...
  facteur_attenuation_temp)*PSI_UVE_temp - pi/4));
end
end

if compteur_subload == 1
  M_dr_t_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
  M_rot_t_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);

```



```

M_S_phi_d_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
M_S_theta_d_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
M_S_phi_t_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
M_S_theta_t_lin_discont = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
end

for j=1:1:nb_couche
    t_temp = M_t(1,j);
    for i=1:1:nbpt
        M_dr_t_lin_discont(i,j,compteur_subload) = M_dr_m_lin_discont(i,j,compteur_subload) ...
            + M_dr_d_lin_discont(i,j,compteur_subload);
        M_rot_t_lin_discont(i,j,compteur_subload) = M_rot_d_lin_discont(i,j, ...
            compteur_subload); % On neglige la rotation occasionnee par la solution ...
            membrane
        M_S_phi_d_lin_discont(i,j,compteur_subload) = M_N_phi_d_lin_discont(i,j, ...
            compteur_subload)/t_temp;
        M_S_theta_d_lin_discont(i,j,compteur_subload) = M_N_theta_d_lin_discont(i,j, ...
            compteur_subload)/t_temp;
        M_S_phi_t_lin_discont(i,j,compteur_subload) = M_S_phi_m_lin_discont(i,j, ...
            compteur_subload) + M_S_phi_d_lin_discont(i,j,compteur_subload);
        M_S_theta_t_lin_discont(i,j,compteur_subload) = M_S_theta_m_lin_discont(i,j, ...
            compteur_subload) + M_S_theta_d_lin_discont(i,j,compteur_subload);
    end
end

% Superposition des solutions de chaque sous—pression
if compteur_subload == 1
    M_N_phi_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_N_theta_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_dr_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_dr_t_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_rot_t_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_phi_pvs_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_phi_pvi_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_theta_pvs_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_theta_pvi_d_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_phi_m_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_theta_m_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_phi_t_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_S_theta_t_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche,nb_subload);
    M_p_lin_total = zeros(nbpt,nb_couche+1,nb_subload);

    M_N_phi_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_N_phi_d_lin_discont(:, :, compteur_subload) ...
        ;

```

```

M_N_theta_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_N_theta_d_lin_discont(:, :, ...
    compteur_subload);
M_dr_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_m_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_dr_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_d_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_dr_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_t_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_rot_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_rot_t_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_S_phi_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_m_lin_discont(:, :, compteur_subload) ...
;
M_S_theta_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_m_lin_discont(:, :, ...
    compteur_subload);
M_S_phi_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_d_lin_discont(:, :, compteur_subload) ...
;
M_S_theta_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_d_lin_discont(:, :, ...
    compteur_subload);
M_S_phi_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_t_lin_discont(:, :, compteur_subload) ...
;
M_S_theta_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_t_lin_discont(:, :, ...
    compteur_subload);
M_p_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_p_lin_discont(:, :, compteur_subload);
else
M_N_phi_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_N_phi_d_lin_total(:, :, compteur_subload - ...
    1) + M_N_phi_d_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_N_theta_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_N_theta_d_lin_total(:, :, ...
    compteur_subload - 1) + M_N_theta_d_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_dr_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_m_lin_total(:, :, compteur_subload - 1) + ...
    M_dr_m_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_dr_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_m_lin_total(:, :, compteur_subload - 1) + ...
    M_dr_m_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_dr_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_d_lin_total(:, :, compteur_subload - 1) + ...
    M_dr_d_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_dr_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_dr_t_lin_total(:, :, compteur_subload - 1) + ...
    M_dr_t_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_rot_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_rot_t_lin_total(:, :, compteur_subload - 1) + ...
    M_rot_t_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_S_phi_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_m_lin_total(:, :, compteur_subload - ...
    1) + M_S_phi_m_lin_discont(:, :, compteur_subload);    % Seulement utile pour ...
    visualiser la distribution de la solution membrane
M_S_theta_m_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_m_lin_total(:, :, ...
    compteur_subload - 1) + M_S_theta_m_lin_discont(:, :, compteur_subload);    % ...
    Seulement utile pour visualiser la distribution de la solution membrane
M_S_phi_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_d_lin_total(:, :, compteur_subload - ...
    1) + M_S_phi_d_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_S_theta_d_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_d_lin_total(:, :, ...
    compteur_subload - 1) + M_S_theta_d_lin_discont(:, :, compteur_subload);

```

```

M_S_phi_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_phi_t_lin_total(:, :, compteur_subload - ...
    1) + M_S_phi_t_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_S_theta_t_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_S_theta_t_lin_total(:, :, ...
    compteur_subload - 1) + M_S_theta_t_lin_discont(:, :, compteur_subload);
M_p_lin_total(:, :, compteur_subload) = M_p_lin_total(:, :, compteur_subload - 1) + ...
    M_p_lin_discont(:, :, compteur_subload);
end

if it_nonlin == 0
    if compteur_subload == 1
        M_coord_x_B_t_lin_discont = zeros(nbpt, nb_couche, nb_subload);
    end
    M_coord_x_B_t_lin_discont(:, :, compteur_subload) = fonction_M_coord_x_B_t(nb_couche, ...
        nbpt, M_coord_x_A, M_dr_t_lin_total(:, :, compteur_subload));
end

%% -----
% ____Passage au prochain programme

if grand_dep == 0 && compteur_subload < nb_subload
    GEOM_GRAND_DEP_discont
elseif nonlineaire == 0 && it_nonlin == 0
    NONLINEAIRE
else
    EXPORT
end

% Fin du programme de la solution de discontinuites

```

## Programme de mise à jour de la géométrie suite à l'analyse des effets de discontinuité

```

%% Programme qui calcule la geometrie du modele pour l'iteration des grands déplacements

disp(['Calcul des parametres geometriques pour la sous-charge ', num2str(compteur_subload + ...
    1), ' des grands déplacements pour l''analyse de discontinuite ...'])
disp(' ')

it_grand_dep = 0; % Remise a zero pour la convergence de la solution membrane ...
    du prochain subload
compteur_membrane = 0;

option_discont = 1;

if option_discont == 1
    disp('La geometrie de la premiere lamelle n''est pas evaluee en fonction de la longueur ...
        de l''arc de cercle.')
else
    disp('La geometrie de la premiere lamelle est evaluee en fonction de la longueur de l'' ...
        arc de cercle.')
    disp('Sa courbure est donc accentuee (option_discont different de 1 dans le programme ...
        GEOM_GRAND_DEP_discont.m. ')
end

if decalage_profil ~= 1 && profil == 1 % Decalage du profil en arc de cercle
    %[...] Code masque car option non utilisee pour l'article 4
else
    % Conditions aux limites
    CL1x = M_coord_x_B_t_lin_discont(1,1,compteur_subload) % Condition limite en x au ...
        plateau vertebraal superieur
    CL2x = M_coord_x_B_t_lin_discont(m,1,compteur_subload) % Condition limite en x au plan ...
        transversal de symetrie
    CL3x = M_coord_x_B_t_lin_discont(1,1,compteur_subload) % Condition limite en x au ...
        plateau vertebraal inferieur
    CL1ry = 0;
    CL3ry = 0;
    if profil==3
        % La courbe est orientee de sorte que l'axe z correspond a l'abscisse et l'axe x ...
            correspond a l'ordonnee.
        CL1ry = (M_coord_x_B_t_lin_discont(1,1,compteur_subload)-M_coord_x_B_t_lin_discont ...
            (2,1,compteur_subload))/(M_Hpc_lin_discont(1,1,compteur_subload)- ...
            M_Hpc_lin_discont(2,1,compteur_subload)); % Condition limite (pente) au plateau ...
            vertebraal superieur
    elseif profil==4

```

```

        CL1ry = M_CL_lin_discont(3,1,1) % pente constante
        CL3ry = -CL1ry; % Condition limite (pente) au plateau vertebraal inferieur
    end
end

%% -----
% Passage au programme GEOMETRIE

GEOMETRIE

% Fin du programme de mise a jour des parametres geometriques

```

## Programme d'exportation des résultats

*%% Programme d'exportation des donnees et des resultats MATLAB dans des fichiers texte*

```

if OS == L      % Linux
    if anisotrope == n
        if discontinuites == n
            dir_exist = exist('ANALYSE/MATLAB/ISO/LIN/MEMBRANE/', 'dir');
            if dir_exist ~= 7
                mkdir('ANALYSE/MATLAB/ISO/LIN/MEMBRANE/')
            end
            repertoire = 'ANALYSE/MATLAB/ISO/LIN/MEMBRANE/'; 's';
        else
            dir_exist = exist('ANALYSE/MATLAB/ISO/LIN/DISCONT/', 'dir');
            if dir_exist ~= 7
                mkdir('ANALYSE/MATLAB/ISO/LIN/DISCONT/')
            end
            repertoire = 'ANALYSE/MATLAB/ISO/LIN/DISCONT/'; 's';
        end
    else % anisotrope == o
        if discontinuites == n
            dir_exist = exist('ANALYSE/MATLAB/ANISO/LIN/MEMBRANE/', 'dir');
            if dir_exist ~=7
                mkdir('ANALYSE/MATLAB/ANISO/LIN/MEMBRANE/')
            end
            repertoire = 'ANALYSE/MATLAB/ANISO/LIN/MEMBRANE/'; 's';
        else
            dir_exist = exist('ANALYSE/MATLAB/ANISO/LIN/DISCONT/', 'dir');
            if dir_exist ~= 7
                mkdir('ANALYSE/MATLAB/ANISO/LIN/DISCONT/')
            end
            repertoire = 'ANALYSE/MATLAB/ANISO/LIN/DISCONT/'; 's';
        end
    end
else % Windows
    if anisotrope == n
        if discontinuites == n
            dir_exist = exist('ANALYSE\MATLAB\ISO\LIN\MEMBRANE\ ', 'dir');
            if dir_exist ~= 7
                mkdir('ANALYSE\MATLAB\ISO\LIN\MEMBRANE\ ')
            end
            repertoire = 'ANALYSE\MATLAB\ISO\LIN\MEMBRANE\ '; 's';
        else
            dir_exist = exist('ANALYSE\MATLAB\ISO\LIN\DISCONT\ ', 'dir');

```

```

        if dir_exist ~= 7
            mkdir('ANALYSE\MATLAB\ISO\LIN\DISCONT\'')
        end
        repertoire = 'ANALYSE\MATLAB\ISO\LIN\DISCONT\''; 's';
    end
else % anisotrope == 0
    if discontinuities == n
        dir_exist = exist('ANALYSE\MATLAB\ANISO\LIN\MEMBRANE\'', 'dir');
        if dir_exist ~= 7
            mkdir('ANALYSE\MATLAB\ANISO\LIN\MEMBRANE\'')
        end
        repertoire = 'ANALYSE\MATLAB\ANISO\LIN\MEMBRANE\''; 's';
    else
        dir_exist = exist('ANALYSE\MATLAB\ANISO\LIN\DISCONT\'', 'dir');
        if dir_exist ~= 7
            mkdir('ANALYSE\MATLAB\ANISO\LIN\DISCONT\'')
        end
        repertoire = 'ANALYSE\MATLAB\ANISO\LIN\DISCONT\''; 's';
    end
end
end

end

%[...] Code masque car option non utilisee pour l'article 4

%% Sauvegarde du workspace

if discontinuities == n
    filename = [repertoire, 'membrane_', num2str(nb_it_grand_dep), 'it.mat'];
else
    filename = [repertoire, 'discont_', num2str(nb_it_grand_dep), 'it_', num2str(nb_subload), ' ...
        _subload.mat'];
end
save(filename)

%% FIN DE L'ANALYSE

```

### Fonction de calcul des coordonnées initiales en x

```
function [M_coord_x_A] = fonction_M_coord_x_A(nb_couche, nbpt, M_R, M_r_phi, M_phi)
% Fonction qui evalue les coordonnees en x au point A de la courbe contraintes-deformations

M_coord_x_A = zeros(nbpt, nb_couche);
for j = 1:1:nb_couche
    for i = 1:1:nbpt
        M_coord_x_A(i, j) = M_R(i, j) + M_r_phi(i, j)*sin(M_phi(i, j));
    end
end
```

### Fonction de calcul des coordonnées finales en x de la solution membrane

```
function [M_coord_x_B_m] = fonction_M_coord_x_B_m(nb_couche, nbpt, M_coord_x_A, M_dr_m)
% Fonction qui evalue les coordonnees en x au point B de la courbe contraintes-deformations ...
% pour la solution membrane

for j = 1:1:nb_couche
    for i = 1:1:nbpt
        M_coord_x_B_m(i, j) = M_coord_x_A(i, j) + M_dr_m(i, j);
    end
end
```

### Fonction de calcul des coordonnées finales en x

```
function [M_coord_x_B_t] = fonction_M_coord_x_B_t(nb_couche, nbpt, M_coord_x_A, M_dr_t)
% Fonction qui evalue les coordonnees en x au point B de la courbe contraintes-deformations ...
% pour la solution totale (membrane et discontinuites)

M_coord_x_B_t = zeros(nbpt, nb_couche);
for j = 1:1:nb_couche
    for i = 1:1:nbpt
        M_coord_x_B_t(i, j) = M_coord_x_A(i, j) + M_dr_t(i, j);
    end
end
```

### Fonction de calcul des coordonnées finales en z de la solution membrane

```
function [M_coord_z_B_m_aniso] = fonction_M_coord_z_B_m_aniso(m, nbpt, nb_couche, M_t, ...
    S_barre, M_N_phi_m, M_N_theta_m, M_Hps, M_r_phi, M_Omega, M_H)
% Fonction qui evalue les coordonnees en x au point B de la courbe contraintes-deformations ...
% pour la solution membrane
```



```

% Construction de la matrice des deformations longitudinales (loi de Hooke)
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        M_eps_phi(i,j) = 1/M_t(1,j) * (S_barre(2,1,j)*M_N_theta_m(i,j) + S_barre ...
            (2,2,j)*M_N_phi_m(i,j));
    end
end

% Construction de la matrice des deformations circonferentielles (loi de Hooke)
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        M_eps_theta(i,j) = 1/M_t(1,j) * (S_barre(1,1,j)*M_N_theta_m(i,j) + S_barre ...
            (1,2,j)*M_N_phi_m(i,j));
    end
end

% Angles entre le plan transversal de symetrie et les points aux intersection des plans de ...
separation
M_Omega_ps = zeros(m+1,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m+1
        M_Omega_ps(i,j) = asin(M_Hps(i,1)/M_r_phi(1,j));
    end
end

M_upsilon = zeros(m,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        M_upsilon(i,j) = M_Omega_ps(i,j) - M_Omega_ps(i+1,j);
    end
end

M_upsilon_prime = zeros(m,nb_couche);
M_somme_upsilon = zeros(m+1,nb_couche);
somme_upsilon_temp = 0;
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:m
        for ii=i:1:m
            somme_upsilon_temp = somme_upsilon_temp + M_upsilon(ii,j);
        end
        M_somme_upsilon(i,j) = somme_upsilon_temp;
        somme_upsilon_temp = 0;
    end
end

```

```

        for i=1:1:m
            M_upsilon_prime(i,j) = M_Omega(i,j) - M_somme_upsilon(i+1,j);
        end
    end

    % Construction de la matrice d'equations de compatibilite des déplacements ...
    % verticaux (m x (nb_couche - 1))

    somme_dupsilon_temp = 0;
    for j=1:1:nb_couche
        for i=1:1:m
            for ii=i:1:m
                somme_dupsilon_temp = somme_dupsilon_temp + M_upsilon(ii,j) ...
                    *M_eps_phi(ii,j);
            end
            M_somme_dupsilon(i,j) = somme_dupsilon_temp;
            somme_dupsilon_temp = 0;
        end
    end

    for j=1:1:nb_couche
        M_H_finale(1,j) = M_r_phi(1,j)*(sin(M_Omega(1,j)))+M_somme_dupsilon(1,j)*cos ...
            (M_Omega(1,j));
        for i=2:1:m-1
            M_H_finale(i,j) = M_r_phi(1,j)*(sin(M_Omega(i,j)))+(M_upsilon_prime ...
                (i,j)*M_eps_phi(i,j) + M_somme_dupsilon(i+1,j))*cos(M_Omega(i,j) ...
                ));
        end
    end

    end

    for j=1:1:nb_couche
        M_coord_z_B_m_aniso(m,j) = M_H(m,1);
        for i=1:1:m-1
            M_coord_z_B_m_aniso(i,j) = M_H_finale(i,j);
            M_coord_z_B_m_aniso(nbpt+1-i,j) = - M_H_finale(i,j); % ...
            % Symetrisation de la solution
        end
    end

end

```

## Fonction de subdivision de la hauteur totale de l'anneau fibreux

```

function [M_H] = fonction_M_H(nbpt, H)
%Fonction qui construit la matrice de hauteur des plans de coupe

```

```

dH = H/(nbpt-1);
H_temp = H/2;
M_H = zeros(nbpt,1);
for i=1:1:nbpt
    M_H(i,1) = H_temp;
    H_temp = H_temp - dH;      % Hauteur decroissante
end

```

## Fonction d'estimation des pressions de contact

```

function [M_p] = fonction_M_p_realiste(m, nb_couche, pnp, pext, M_r_theta_s_lin, M_t)
% Fonction qui evalue la distribution des pressions de contact

% Distribution selon la theorie des reservoirs a paroi epaisse

M_p = zeros(m,nb_couche);
M_p(:,1) = pnp;
t_total = sum(M_t);
t_temp = 0;
for j = 2:1:nb_couche + 1
    t_temp = t_temp + M_t(1,j-1);
    for i = 1:1:m
        r_temp = M_r_theta_s_lin(i,j);
        Rint = r_temp - t_temp;
        Rext = Rint + t_total;
        Y = Rext/Rint;
        pression = -((1 - Rext^2/r_temp^2)*pnp + (Rext^2/r_temp^2 - Y^2)*pext)/(Y^2 - 1);
        M_p(i,j) = pression;
    end
end
end

```

## Fonction de calcul des coordonnées angulaires longitudinales

```

function [M_phi] = fonction_M_phi(nbpt, m, nb_couche, M_profil_vecteur_normal_x, ...
    M_profil_vecteur_normal_y, M_profil_vecteur_normal_z)
%Fonction qui construit la matrice des angles phi aux surfaces des lamelles (lignes:hauteur ...
    ; colonnes:lamelle)

M_phi = zeros(nbpt,nb_couche);
for i=1:1:m
    for j=1:1:nb_couche
        M_profil_vecteur_normal_temp = [ M_profil_vecteur_normal_x(i,j), ...
            M_profil_vecteur_normal_y(i,j), M_profil_vecteur_normal_z(i,j) ];
    end
end

```

```

        phi_temp = acos(M_profil_vecteur_normal_temp(1,3)/norm(M_profil_vecteur_normal_temp ...
            (1,:)));
        M_phi(i,j) = phi_temp;
    end
end
% Pour forcer l'exactitude de la symetrie
ii = m-1;
for i=m+1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche
        M_phi(i,j) = pi() - M_phi(ii,j);
    end
    ii = ii - 1;
end
end

```

### Fonction de calcul des coordonnées angulaires longitudinales des plateaux vertébraux

```

function [M_phi_pvs, M_phi_pvi] = fonction_M_phi_pv(nbpt, nb_couche, M_phi)
%Fonction qui construit la matrice des angles phi aux mi-épaisseurs des lamelles au niveau ...
    des plateaux vertebraux

M_phi_pvs = zeros(1,nb_couche);
M_phi_pvi = zeros(1,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    M_phi_pvs(1,j) = M_phi(1,j);
    M_phi_pvi(1,j) = M_phi(nbpt,j);
end
end

```

### Fonction de calcul des coordonnées angulaires longitudinales aux interfaces des lamelles

```

function [M_phi_s] = fonction_M_phi_s(nbpt, m, nb_couche, M_profil_vecteur_normal_x_s, ...
    M_profil_vecteur_normal_y_s, M_profil_vecteur_normal_z_s)
% Fonction qui construit la matrice des angles phi aux surfaces des lamelles (lignes: ...
    hauteur; colonnes:lamelle)

M_phi_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
for i=1:1:m
    for j=1:1:nb_couche+1
        M_profil_vecteur_normal_s_temp = [M_profil_vecteur_normal_x_s(i,j), ...
            M_profil_vecteur_normal_y_s(i,j), M_profil_vecteur_normal_z_s(i,j)];
        phi_s_temp = acos(M_profil_vecteur_normal_s_temp(1,3)/norm( ...
            M_profil_vecteur_normal_s_temp(1,:))); % cos theta = C.O./Hyp
        M_phi_s(i,j) = phi_s_temp;
    end
end

```

```

end
% Pour forcer l'exactitude de la symetrie
ii = m-1;
for i=m+1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche+1
        M_phi_s(i,j) = pi() - M_phi_s(ii,j);
    end
    ii = ii - 1;
end
end

```

### Fonction de calcul des coordonnées des points sur les arcs de cercle

```

function [ M_profil_cercle_coord]=fonction_M_profil_cercle_coord(nbpt, M_Hpc, ...
    M_profil_coord_xyz_centre_courbure, M_profil_rayons_temp)
%Fonction qui genere les coordonnees des points d'un profil circulaire

syms z r_phi centre_x centre_z

% L'axe x est horizontal, l'axe y est circonferentiel et l'axe z est vertical.

eq_profil_cercle=sqrt(r_phi^2 - (z - centre_z)^2) + centre_x;

M_profil_cercle_coord_x = zeros(nbpt,1);
M_profil_cercle_coord_y = zeros(nbpt,1);
M_profil_cercle_coord_z = zeros(nbpt,1);

for i=1:1:nbpt
    z = M_Hpc(i,1);
    r_phi = M_profil_rayons_temp(i,1);
    centre_x = M_profil_coord_xyz_centre_courbure(i,1);
    centre_z = M_profil_coord_xyz_centre_courbure(i,3);
    M_profil_cercle_coord_x(i,1)=eval(eq_profil_cercle);
    M_profil_cercle_coord_z(i,1)=z;
end

M_profil_cercle_coord = [ M_profil_cercle_coord_x, M_profil_cercle_coord_y, ...
    M_profil_cercle_coord_z];

```

### Fonction de calcul des coordonnées des centres de courbure

```

function [ M_profil_coord_centre_courbure ] = fonction_M_profil_cercle_coord_centre_courbure( ...
    nbpt, CL1x, CL1z, CL2x, CL2z)
%Fonction qui evalue les coordonnees des centres de courbure

```

```

% L'axe x est horizontal, l'axe y est circonferentiel et l'axe z est vertical.

g = (CL2x - CL1x);
hyp = sqrt(CL1z^2+g^2);           % Hypotenuse reliant l'extremite de l'arc et l'equateur de ...
    l'arc
gamma = atan(g/CL1z);
r_phi = (hyp/2)/sin(gamma);
centre_x = CL2x-r_phi;
centre_z = CL2z;

M_profil_coord_centre_courbure = zeros(nbpt,3);
for i=1:1:nbpt
    M_profil_coord_centre_courbure(i,1) = centre_x;
    M_profil_coord_centre_courbure(i,2) = 0;
    M_profil_coord_centre_courbure(i,3) = centre_z;
end

```

## Fonction de calcul des rayons du profil en arc de cercle

```

function [M_profil_cercle_rayons] = fonction_M_profil_cercle_rayons(nbpt, CL1x, CL1z, CL2x)
%Fonction qui evalue les rayons de courbure aux coordonnees souhaitees

% L'axe x est horizontal, l'axe y est circonferentiel et l'axe z est vertical.

M_profil_cercle_rayons = zeros(nbpt,1);

g = (CL2x - CL1x);
hyp = sqrt(CL1z^2+g^2);           % Hypotenuse reliant l'extremite de l'arc et l'equateur de ...
    l'arc
gamma = atan(g/CL1z);
r_phi = (hyp/2)/sin(gamma);

for i=1:1:nbpt
    M_profil_cercle_rayons(i,1) = r_phi;
end

```

## Fonction de calcul des vecteurs normaux aux points de coordonnées

```

function [M_profil_vecteur_normal] = fonction_M_profil_cercle_vecteur_normal(nbpt, ...
    M_profil_vecteur_tangent)
%Fonction qui evalue les vecteurs normaux aux coordonnees souhaitees

```

```

% L'axe x est horizontal , l'axe y est circonferentiel et l'axe z est vertical.

M_profil_vecteur_y = [0,1,0]; % Vecteur unitaire dans la direction y

M_profil_vecteur_normal = zeros(nbpt,3);
for i=1:1:nbpt
    M_vecteur_tangent_temp = M_profil_vecteur_tangent(i,:);
    M_profil_vecteur_normal_temp = cross(M_profil_vecteur_y , M_vecteur_tangent_temp); % ...
    Donne le vecteur normal a la lamelle et pointant vers l'exterieur du disque
    % Calcul du vecteur normal unitaire
    M_profil_vecteur_normal_temp = M_profil_vecteur_normal_temp/norm( ...
        M_profil_vecteur_normal_temp);
    M_profil_vecteur_normal(i,1)=M_profil_vecteur_normal_temp(1,1);
    M_profil_vecteur_normal(i,2)=M_profil_vecteur_normal_temp(1,2);
    M_profil_vecteur_normal(i,3)=M_profil_vecteur_normal_temp(1,3);
end

```

## Fonction de calcul des vecteurs tangents aux points de coordonnées

```

function [M_profil_vecteur_tangent] = fonction_M_profil_cercle_vecteur_tangent(nbpt, ...
    M_profil_coord, M_profil_rayons_temp, M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp)
%Fonction qui evalue la tangents en differents points du profil

% L'axe x est horizontal , l'axe y est circonferentiel et l'axe z est vertical.
% La courbe est orientee sur le cote , de sorte que l'equation soit de la forme f(z)=x

syms z r_phi centre_x centre_z
eq_profil_cercle=sqrt(r_phi^2 - (z - centre_z)^2) + centre_x;
dx=diff(eq_profil_cercle , 'z');

M_profil_vecteur_tangent = zeros(nbpt,3);
for i=1:1:nbpt
    z = M_profil_coord(i,3);
    r_phi = M_profil_rayons_temp(i,1);
    centre_x = M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp(i,1);
    centre_z = M_profil_coord_xyz_centre_courbure_temp(i,3);
    tangente = eval(dx);
    M_profil_vecteur_tangent(i,1)=tangente; % La tangente est le ratio de dz/dx
    M_profil_vecteur_tangent(i,2)=0;
    M_profil_vecteur_tangent(i,3)=1; % On pose dz=1
end

```

### Fonction de calcul des rayons horizontaux aux points de coordonnées

```

function [M_r] = fonction_M_r(nbpt, m, nb_couche, M_r_theta, M_phi)
% Fonction qui construit la matrice des rayons horizontaux aux mi-épaisseur des lamelles

M_r = zeros(nbpt,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:nbpt
        phi_temp = M_phi(i,j);
        r_theta_temp = M_r_theta(i,j);
        r_temp = r_theta_temp*sin(phi_temp);           % Rayon horizontal de la lamelle j a ...
                                                         la coupe phi
        M_r(i,j) = r_temp;
    end
end
% Pour forcer l'exactitude de la symetrie
ii = m-1;
for i=m+1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche
        M_r(i,j) = M_r(ii,j);
    end
    ii = ii - 1;
end

```

### Fonction de calcul du rayon majeur aux points de coordonnées

```

function [M_R] = fonction_M_R_majeur(nbpt, nb_couche, M_profil_coord_x_centre_courbure)
%Fonction qui construit la matrice M_R

M_R = zeros(nbpt,nb_couche);
for i=1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche
        M_R(i,j) = M_profil_coord_x_centre_courbure(i,j);
    end
end

```

### Fonction de calcul du rayon majeur aux points de coordonnées aux interfaces des lamelles

```

function [M_R_s] = fonction_M_R_majeur_s(nbpt, nb_couche, M_profil_coord_x_centre_courbure_s ...
)
%Fonction qui construit la matrice M_R

```



```

M_R_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
for i=1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche+1
        M_R_s(i,j) = M_profil_coord_x_centre_courbure_s(i,j);
    end
end

```

### Fonction de calcul des rayons dans la direction longitudinale

```

function [M_r_phi] = fonction_M_r_phi(profil,nbpt,nb_couche,M_profil_rayons)
%Fonction qui construit la matrice M_r_phi

```

```

M_r_phi = zeros(nbpt,nb_couche);
for i=1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche
        if profil == 1
            M_r_phi(i,j) = M_profil_rayons(i,j);
        else
            M_r_phi(i,j) = -M_profil_rayons(i,j); % Le signe moins est
            % necessaire car la methode utilisee pour generer les rayons de la
            % courbe polynomiale renvoie une valeur negative si le rayon est
            % situe a l'interieur de la courbe et une valeur positive si le
            % rayon est situe a l'exterieur de la courbe.
        end
    end
end
end

```

### Fonction de calcul des rayons longitudinaux aux interfaces des lamelles

```

function [M_r_phi_s] = fonction_M_r_phi_s(profil,nbpt,nb_couche,M_profil_rayons_s)
%Fonction qui construit la matrice M_r_phi_s

M_r_phi_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
for i=1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche+1
        if profil == 1
            M_r_phi_s(i,j) = M_profil_rayons_s(i,j);
        else
            M_r_phi_s(i,j) = -M_profil_rayons_s(i,j); % Rayon r_phi aux surfaces des ...
            lamelles
            % Le signe moins est necessaire car la methode utilisee pour generer les rayons ...
            de la
            % courbe polynomiale renvoie une valeur negative si le rayon est

```

```

        % situe a l'interieur de la courbe et une valeur positive si le
        % rayon est situe a l'exterieur de la courbe.
    end
end
end

```

## Fonction de calcul des rayons longitudinaux aux plateaux vertébraux

```

function [M_r_pv] = fonction_M_r_pv(nb_couche, M_R, M_r_phi, M_phi_pvs, M_phi_pvi)
% Fonction qui construit la matrice des rayons horizontaux aux mi-épaisseur des lamelles

M_r_pv = zeros(1,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    phi_pvs_temp = M_phi_pvs(1,j);
    phi_pvi_temp = M_phi_pvi(1,j);
    R_temp = M_R(1,j);
    r_phi_temp = M_r_phi(1,j);
    r_pv_temp = R_temp + r_phi_temp*sin(phi_pvs_temp);           % Rayon horizontal des ...
                        lamelles au niveau du plateau vertebraal superieur
    M_r_pv(1,j) = r_pv_temp;
end

```

## Fonction de calcul des rayons horizontaux aux interfaces des lamelles

```

function [M_r_s] = fonction_M_r_s(nbpt, m, nb_couche, M_r_theta_s, M_phi_s)
% Fonction qui construit les matrices des rayons horizontaux aux surfaces

M_r_s = zeros(nbpt, nb_couche+1);
for j=1:1:nb_couche+1
    for i=1:1:m
        phi_s_temp = M_phi_s(i,j);
        r_theta_s_temp = M_r_theta_s(i,j);
        r_s_temp = r_theta_s_temp*sin(phi_s_temp);           % Rayon horizontal de la lamelle ...
                        j a la coupe phi
        M_r_s(i,j) = r_s_temp;
    end
end

% Pour forcer l'exactitude de la symetrie
ii = m-1;
for i=m+1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche+1
        M_r_s(i,j) = M_r_s(ii,j);
    end
end

```

```

    end
    ii = ii - 1;
end

```

### Fonction de calcul des rayons dans la direction circonférentielle

```

function [M_r_theta] = fonction_M_r_theta(nbpt, m, nb_couche, M_R, M_phi, M_r_phi)
% Fonction qui construit la matrice des rayons r_theta aux aux mi-épaisseur des lamelles

M_r_theta = zeros(nbpt,nb_couche);
for j=1:1:nb_couche
    for i=1:1:nbpt
        R_temp = M_R(i,j);
        r_phi_temp = M_r_phi(i,j);
        phi_temp = M_phi(i,j);
        r_theta_temp = (R_temp+r_phi_temp*sin(phi_temp))/sin(phi_temp);
        M_r_theta(i,j) = r_theta_temp;
    end
end

% Pour forcer l'exactitude de la symetrie
ii = m-1;
for i=m+1:1:nbpt
    for j=1:1:nb_couche
        M_r_theta(i,j) = M_r_theta(ii,j);
    end
    ii = ii - 1;
end

```

### Fonction de calcul des rayons dans la direction circonférentielle aux interfaces des lamelles

```

function [M_r_theta_s] = fonction_M_r_theta_s(nbpt, m, nb_couche, M_R_s, M_phi_s, M_r_phi_s ...
)
% Fonction qui construit les matrices des rayons r_theta aux surfaces

M_r_theta_s = zeros(nbpt,nb_couche+1);
for j=1:1:nb_couche+1
    for i=1:1:m
        R_s_temp = M_R_s(i,j);
        r_phi_s_temp = M_r_phi_s(i,j);
        phi_s_temp = M_phi_s(i,j);
        r_theta_s_temp = (R_s_temp+r_phi_s_temp*sin(phi_s_temp))/sin(phi_s_temp);
        M_r_theta_s(i,j) = r_theta_s_temp;
    end
end

```

```

        end
    end

    % Pour forcer l'exactitude de la symetrie
    ii = m-1;
    for i=m+1:1:nbpt
        for j=1:1:nb_couche+1
            M_r_theta_s(i,j) = M_r_theta_s(ii,j);
        end
        ii = ii - 1;
    end
end

```

## Fonction de calcul des profils décalés

```

function [offset] = fonction_offset_profil_cercle(surface, j, M_Hpc, M_CL1x, M_CL1z, ...
    M_profil_rayons, M_profil_coord_x_centre_courbure, M_profil_coord_z_centre_courbure)
%Fonction qui evalue le decalage de la prochaine lamelle

% L'axe x est horizontal, l'axe y est circonferentiel et l'axe z est vertical. La courbe ...
% est orientee sur le cote, de sorte que l'equation soit de la forme f(z)=x

clear x
clear z
syms x z

r_phi = M_profil_rayons(1,1);
centre_x = M_profil_coord_x_centre_courbure(1,1);
centre_z = M_profil_coord_z_centre_courbure(1,1);

eq_profil=sqrt(r_phi^2 - (z - centre_z)^2) + centre_x;

pente_t = 1/diff(eq_profil,'z');
pente_m = -1/pente_t;

b = M_CL1z(1,j) - pente_m*M_CL1x(1,j);

eq1 = pente_m*x + b - z;
eq2 = eq_profil - x;

M_coord_x_z = solve(eq1,eq2,x,z,'Real',true);
M_coord_x = eval(M_coord_x_z.x);
M_coord_z = eval(M_coord_x_z.z);

x = M_coord_x;

```

```

z = M_coord_z;

if surface == 1 && j == 1 % On traite la surface interieure de la premiere lamelle
    facteur = 1.1;
    disp('Un facteur de selection de la solution a ete pose approximativement. Si le ...
        programme plante, il faudra peut-etre modifier le parametre "facteur" dans la ...
        fonction "fonction_CL1ry_profil_poly.m".')
    ii = 1;
    while M_coord_z(ii,1) > M_Hpc(1,1)*facteur % 1.1 est un facteur "tentatif" pour ...
        exclure une solution en z qui serait en dehors des limites raisonnables pour la ...
        surface interieure de la premiere lamelle. Ajuster le facteur 1.1 au besoin.
        ii = ii + 1;
    end
else
    ii = 1;
    while M_coord_z(ii,1) > M_Hpc(1,1)
        ii = ii + 1;
    end
end

x = M_coord_x(ii,1);
z = M_coord_z(ii,1);

offset = sqrt((M_CL1x(1,j) - x)^2 + (M_CL1z(1,j) - z)^2);

if surface == 1 && j == 1
    offset = -offset;
end
offset = offset;

```



## ANNEXE V

### PROGRAMME ANSYS POUR L'ARTICLE 4

```
! _____!  
!   Programme ANSYS pour la validation du modèle analytique  
!   Géométrie : disque axisymétrique avec renflement latéral (étude 2D)  
!   Date de mise à jour : 2015/05/01  
! _____!  
  
! _____!  
!                               *** INITIALISATION ***  
  
FINISH ! Sort du processeur en cours  
/CLEAR ! Retour au mode Begin et efface toutes les données en cours  
  
!                               *** HYPOTHÈSES POUR LE NOYAU PULPEUX (NP) ***  
  
! Le nucleus pulposus (NP) est remplacé par une pression interne uniforme pour les articles 1,  
! 2 et 3. Il est modélisé à l'aide d'éléments fluides hydrostatiques pour l'article 4.  
  
!                               *** HYPOTHÈSES POUR L'ANNEAU FIBREUX (AF) ***  
  
! L'anneau fibreux (AF) supporte la flexion (rigidité en flexion).  
! _____!  
!                               *** PRÉ-PROCESSEUR (PREP7) ***  
  
/PREP7          ! Charge le module de préparation des données  
/MKDIR,ANALYSE  ! Création du répertoire ANALYSE dans le répertoire courant. Les informations  
! sur le modèle seront enregistrées dans ce répertoire.  
  
[...]   CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4  
  
! Création du répertoire pour la solution anisotrope linéaire avec éléments contacts et  
! avec discontinuités (cas 12)      ! Utilisé pour l'article 4  
/MKDIR,ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT  
  
[...]   CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4  
  
/TITLE,DISQUE AXISYMETRIQUE MULTICOUCHE  
/COM DISQUE AXISYMETRIQUE MULTICOUCHE  
/COM SOUMIS À UNE PRESSION INTERNE
```

```

/UNITS,MPA          ! MPA system (mm, Mg, s, Celcius).
*AFUN,DEG           ! angles en degrés
NROPT,FULL,,OFF     ! Recommandé pour analyse non-linéaire avec éléments SHELL209
                   ! Réf.: aide section 3.11 du contact technology guide

!
*** PREP - PARAMÈTRES D'ANALYSE ***

nb_couche=24        ! Nombre de couches dans l'anneau fibreux
membrane=0          ! membrane=0 : coque ; membrane=1 : membrane
                   ! Pour l'option membrane sur les éléments (moments nuls)

!Paramètres pour la sélection du cas à étudier
*DIM,aniso,ARRAY,1,1
aniso(1,1)=1        ! aniso=1 : anisotrope ; aniso=2 : isotrope

*DIM,nonlin,ARRAY,1,1
nonlin(1,1)=2       ! nonlin=1 : non-linéaire ; nonlin=2 : linéaire
                   ! nonlin est pour la modélisation hyperélastique

*DIM,contact,ARRAY,1,1
contact(1,1)=1      ! contact=1: déplacements gérés par contacts
                   ! contact=2: noeuds couplés horizontalement et verticalement

*DIM,discont,ARRAY,1,1
discont(1,1)=1      ! discont=1 : extrémités bloquées horizontalement
                   ! discont=2 : extrémités libres horizontalement

! Création des cas
*IF,aniso(1,1),EQ,1,AND,nonlin(1,1),EQ,1,THEN

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ELSEIF,aniso(1,1),EQ,1,AND,nonlin(1,1),EQ,2
  *IF,contact(1,1),EQ,1,AND,discont(1,1),EQ,1,THEN    ! Aniso lin discont contact
    cas=12      ! Utilisé pour l'article 4
  *ELSEIF,contact(1,1),EQ,1,AND,discont(1,1),EQ,2    ! Aniso lin membrane contact
    cas=11
  *ELSEIF,contact(1,1),EQ,2,AND,discont(1,1),EQ,1    ! Aniso lin discont couplage
    cas=10
  *ELSE ! (contact(1,1),EQ,2,AND,discont(1,1),EQ,2)  ! Aniso lin membrane couplage
    cas=9
  *ENDIF

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

```



```

! Écriture des paramètres aniso, nonlin, contact et discount dans des fichiers pour
! utilisation par MATLAB
*IF,cas,EQ,1,THEN

[...]      CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ELSEIF,cas,EQ,12
    *MWRITE,aniso(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\ANISO,txt,,JIK,1,1,1
    (F4.0)
    *MWRITE,nonlin(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\NONLIN,txt,,JIK,1,1,1
    (F4.0)
    *MWRITE,contact(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\CONTACT,txt,,JIK,1,1,1
    (F4.0)
    *MWRITE,discount(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\DISCONT,txt,,JIK,1,1,1
    (F4.0)

[...]      CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

!                                     *** PREP - GÉOMÉTRIE ***

CSYS,0
H=11                ! Hauteur du disque sous charge axiale
r1=30.5263          ! Rayon longitudinal de la lamelle interne
rnp=16.2            ! Rayon du noyau pulpeux
R=-13.7250          ! Rayon majeur du tore
gonflement_z0=0.4996
ratio_gonflement=1 ! Le gonflement forme un arc de cercle (par hypothèse)

*DIME,t,ARRAY,1,nb_couche

! Vecteur des épaisseurs des lamelles
*DO,j,1,nb_couche,1
    t(1,j)=0.2
*ENDDO

! Vecteur des orientations des fibres dans les lamelles
!ANSYS Help SHELL209: For material property labels,
!the local x-direction corresponds to the meridional
!direction of the shell element. The local y-direction
!is the circumferential. The local z-direction

```

```
!corresponds to the through-the-thickness direction.
*DIM,theta,ARRAY,1,nb_couche
*DO,j,1,nb_couche-1,2
    theta(1,j)=60          ! Correspond à -30 degrés par rapport à l'axe theta
    theta(1,j+1)=-60       ! Correspond à 30 degrés par rapport à l'axe theta
*ENDDO

*DIM,nomlayer,CHAR,1,24
nomlayer(1,1)='LAM01'
nomlayer(1,2)='LAM02'
nomlayer(1,3)='LAM03'
nomlayer(1,4)='LAM04'
nomlayer(1,5)='LAM05'
nomlayer(1,6)='LAM06'
nomlayer(1,7)='LAM07'
nomlayer(1,8)='LAM08'
nomlayer(1,9)='LAM09'
nomlayer(1,10)='LAM10'
nomlayer(1,11)='LAM11'
nomlayer(1,12)='LAM12'
nomlayer(1,13)='LAM13'
nomlayer(1,14)='LAM14'
nomlayer(1,15)='LAM15'
nomlayer(1,16)='LAM16'
nomlayer(1,17)='LAM17'
nomlayer(1,18)='LAM18'
nomlayer(1,19)='LAM19'
nomlayer(1,20)='LAM20'
nomlayer(1,21)='LAM21'
nomlayer(1,22)='LAM22'
nomlayer(1,23)='LAM23'
nomlayer(1,24)='LAM24'

!                                     *** PREP - GEOM - ANNEAU FIBREUX ***

! Les éléments 2-D sont définis dans le plan X-Y

! Système de coordonnée correspondant au plateau vertébral inférieur
LOCAL,11,0,0,-H/2,0,0,90,0
! Système de coordonnée correspondant au plateau vertébral supérieur
LOCAL,12,0,0,H/2,0,0,90,0
! Création d'un système de coordonnée cylindrique pour l'arc de cercle
LOCAL,13,1,R,0,0,0,0,0,ratio_gonflement
```

```

/PNUM,LINE,1
CSYS,13
t_cumul=0
*DO,j,1,nb_couche,1
  nk=2*j-1
  *IF,j,EQ,1,THEN
    K,nk:nk+1,r1,-45:45:90,0
  *ELSE
    t_cumul=t_cumul+t(1,j-1)/2+t(1,j)/2
    K,nk:nk+1,r1+t_cumul,-45:45:90,0
  *ENDIF
  L,nk,nk+1
*ENDDO

CSYS,0

! Coupe des lamelles à l'intersection des plateaux vertébraux
WPCSYS,-1,11
BOPTN,KEEP,NO
LSEL,ALL
LSBW,ALL

WPCSYS,-1,12
BOPTN,KEEP,NO
LSEL,ALL
LSBW,ALL

LSEL,S,LOC,Y,-H/2,H/2,H,1
LSEL,INVE
LDELE,ALL
NUMCMP,LINE

LSEL,ALL
KSL,S
KSEL,INVE
KDELE,ALL
NUMCMP,KP

KSEL,S,LOC,Y,H/2
*DIM,r_ext_IVD,ARRAY,1,1
*GET,r_ext_IVD(1,1),KP,0,MXLOC,X
r_ext_IVD(1,1)=r_ext_IVD(1,1)+t(1,24)/2
*MWRITE,r_ext_IVD(1,1),ANALYSE\r_ext_IVD,txt,,JIK,1,1,1
(2F10.4)

```

```

!                                     *** PREP - GEOM - NOYAU PULPEUX ***

CSYS,0
NUMSTR,KP,101
NUMSTR,LINE,101
NUMSTR,AREA,101
K,101:102,0,-H/2:H/H:0
L,101,102
CSYS,13
K,103:104,r1-t(1,1)/2,-45:45:90,0
L,103,104

!Coupe du NP à l'intersection des plateaux vertébraux
CSYS,13
KSEL,S,KP,,103
LSLK,S,0
WPCSYS,-1,11
BOPTN,KEEP,NO
LSBW,ALL

KSEL,S,KP,,104
LSLK,S,0
WPCSYS,-1,12
BOPTN,KEEP,NO
LSBW,ALL

CSYS,0
LSEL,S,LOC,Y,-H/2,H/2,H,1
LSEL,INVE
LDELE,ALL

LSEL,ALL
KSLI,S
KSEL,INVE
KDELE,ALL

KSEL,ALL
L,101,105
L,102,106
AL,101,102,103,105

```

```

!                                     *** PREP - MATÉRIAUX ***

!                                     *** PREP - MAT - ANNEAU FIBREUX ***

! Toutes les lamelles ont les mêmes propriétés mécaniques

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

! Composantes de la matrice de souplesse obtenue par le programme PROP_MEC_ANISO_ANSYS.m
S11 = 0.0243
S12 = -0.0109
S13 = -0.0261
S14 = 0
S15 = 0
S16 = 0
S21 = -0.0109
S22 = 0.0580
S23 = -0.0261
S24 = 0
S25 = 0
S26 = 0
S31 = -0.0109
S32 = -0.0109
S33 = 0.0580
S34 = 0
S35 = 0
S36 = 0
S41 = 0
S42 = 0
S43 = 0
S44 = 0.1682
S45 = 0
S46 = 0
S51 = 0
S52 = 0
S53 = 0
S54 = 0
S55 = 0.2896
S56 = 0
S61 = 0
S62 = 0
S63 = 0
S64 = 0
S65 = 0

```

S66 = 0.2896

! Correspondance avec les constantes de ANSYS (car l'ordre des colonnes de la matrice de  
! rigidité diffère). Pour information, consulter l'aide ANSYS 11.0 à la  
!s section 2.5.7. Anisotropic Elastic Materials

D11=S11

D21=S21

D31=S31

D41=S61

D51=S41

D61=S51

D22=S22

D32=S32

D42=S62

D52=S54

D62=S52

D33=S33

D43=S63

D53=S43

D63=S53

D44=S66

D54=S64

D64=S65

D55=S44

D65=S54

D66=S55

[...] CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

\*IF,cas,EQ,1,OR,cas,EQ,2,THEN

[...] CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

\*ELSEIF,cas,EQ,11,OR,cas,EQ,12

TB,ANEL,1,,1 ! Matériau anisotrope linéaire

TBTEMP,, ! Température de 0 par défaut

! Écriture de la matrice de souplesse

TBDATA, 1, D11, D21, D31, D41, D51, D61

TBDATA, 7, D22, D32, D42, D52, D62, D33

TBDATA, 13, D43, D53, D63, D44, D54, D64

TBDATA, 19, D55, D65, D66

MP,MU,1,0 ! Coefficient de friction

```

[...]      CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

!
!                                     *** PREP - MAT - NOYAU PULPEUX ***

! Fluide hydrostatique incompressible

! On pourrait ici définir les propriétés de compressibilité au besoin
!K_NP=          ! Bulk modulus (module d'élasticité isostatique)
!alpha_NP=      ! Coefficient de dilatation thermique
!rho_NP=        ! Masse volumique
TB,FLUID,2,,,LIQUID
!TBDATA,1,K_NP
!TBDATA,2,alpha_NP
!TBDATA,3,rho_NP

!
!                                     *** PREP - ÉLÉMENTS ***

!
!                                     *** PREP - ELEM - ANNEAU FIBREUX ***

! SÉLECTION DU NOMBRE D'ÉLÉMENTS SELON LE CAS À TRAITER
! Le nombre d'éléments pour chaque cas a été déterminé par une étude de convergence
! NEANT = Nombre d'éléments par lamelle au site antérieur

*IF,cas,EQ,1,THEN

[...]      CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ELSEIF,cas,EQ,12 ! Aniso lin discount contact
  NEANT=80

[...]      CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

ET,1,SHELL209          ! Élément coque axisymétrique 2D
KEYOPT,1,1,membrane    ! KEYOPT,1,1,1 = Rigidité membrane seulement
KEYOPT,1,2,1           ! Torsion incluse
KEYOPT,1,8,2           ! Store data for TOP, BOTTOM and MID for all layers
                      ! (nécessaire pour avoir les contraintes S dans POST1)

*DO,j,1,nb_couche,1

```

```

        SECTYPE,j,SHELL,,nomlayer(1,j)      ! Chaque lamelle du modèle doit n'avoir qu'une seule
                                              ! lamelle associée. Il y a donc j sections définies,
                                              ! avec une lamelle par section.

        SECDATA,t(1,j),1,theta(1,j),3,nomlayer(1,j)
*ENDDO

*DO,j,1,nb_couche,1
    SECPLLOT,j,1,1
    /WAIT,0.1
*ENDDO

!
    *** PREP - ELEM - NOYAU PULPEUX ***

ET,2,HSFLD241
KEYOPT,2,1,0      ! UX and UY degrees of freedom at surface nodes, HDSP degree of
                  ! freedom at pressure node (default)
KEYOPT,2,3,1      ! Élément axisymétrique
KEYOPT,2,5,0      ! No fluid mass (default)
KEYOPT,2,6,1      ! Incompressible

!
    *** PREP7 - ELEM - CIBLE (SURFACE INTERNE DE LAMELLE EXTÉRIEURE) ***

! If a convex surface is expected to come into contact with a flat or concave
! surface, the flat/concave surface should be the target surface.

! 3.6.5.2 : For 3-D contact, the target element numbering should be such that the rigid
! surface's outward normal points toward the contact surface.
! The outward normal is determined by the right-hand rule.

ET,3,TARGE169      ! Élément target pour modèle 2D

!
    *** PREP7 - ELEM - CONTACT AF (SURFACE EXTERNE DE LAMELLE INTÉRIEURE) ***

ET,4,CONTA172      ! Contact surface-surface 2D
KEYOPT,4,1,0      ! UX,UY ddl
KEYOPT,4,2,0      ! Augmented Lagrangian method (par défaut)
KEYOPT,4,5,4      ! Auto ICONT
KEYOPT,4,7,2      ! Change in contact predictions made to maintain a reasonable
                  ! time/load increment
KEYOPT,4,9,2
KEYOPT,4,10,2      ! Le keyopt(10) de la version 14 de ANSYS indique seulement deux options:
                  ! 0 et 2. L'option 2 est recommandée par ANSYS (aide 3.9.4.1)
                  ! Par contre, l'option 1 est encore effective mais non préférable avec
                  ! l'anisotropie. Elle a pour effet de faire tourner exagérément les

```



```

! lamelles aux plateaux vertébraux autour de l'axe Z (theta),
! même pour FTOLN = 0.01.
! L'option 0 ne donne pas de point d'inflexion aux lamelles internes
! (le contact ne semble pas être géré de façon réaliste).
! L'option 2 donne des résultats satisfaisants.
! Toujours vérifier la pénétration suite à la solution.
KEYOPT,4,11,1 ! Inclure l'épaisseur
KEYOPT,4,12,2 ! Pas de séparation (sinon voilement (flambement) se produit selon phi
! si E2 petit et ANSYS plante)
R,4,,3.0,0.1 ! FKN = 1.0 (1.0 par défaut)
! FTOLN = -0.1 (0.1 ratio par défaut, négatif pour valeur absolue)
! FKN ajusté à 3. Si FKN<3, j'obtiens le message suivant:
! *** WARNING *** SUPPRESSED MESSAGE CP = 871.593 TIME= 14:45:28
! Convergence has been achieved in spite of large penetration.
! If this message is repeated frequently, we recommend either increasing
! penalty stiffness (FKN), or enlarge penetration tolerance(FTOLN).

! *** PREP - MAILLAGE ***

! Pressure node
N,1,0,0,0,0,0,0

! Noeuds pour générer les éléments HSFLD aux plateaux vertébraux
CSYS,0
N,2,0,H/2,0,0,0,0
N,3,0,-H/2,0,0,0,0

! *** PREP7 - MAIL - ANNEAU FIBREUX ***

KSEL,ALL
LSEL,S,LINE,,1,nb_couche,1,0
LESIZE,ALL,,NEANT
!REAL,1
TYPE,1
MAT,1
*DO,j,1,nb_couche,1
    REAL,j
    SECNUM,j
    LMESH,j,j,1
*ENDDO

! *** PREP7 - MAIL - NOYAU PULPEUX ***

LSEL,S,LINE,,1,1,1,0

```

```

NSLL,S,1
TYPE,2
MAT,2
REAL,100
ESURF,1

*DIM,NOEUDS_PV_LAM1,ARRAY,2,1
LSEL,S,LINE,,1,1,1
NSLL,S,1
NSEL,R,LOC,Y,H/2
*GET,NOEUDS_PV_LAM1(1,1),NODE,0,NUM,MIN
NSLL,S,1
NSEL,R,LOC,Y,-H/2
*GET,NOEUDS_PV_LAM1(2,1),NODE,0,NUM,MIN

E,NOEUDS_PV_LAM1(1,1),2,,1
E,3,NOEUDS_PV_LAM1(2,1),,1

*IF,contact(1,1),EQ,1,THEN ! Pour considérer ou non les éléments contact

!          *** PREP7 - MAIL - CIBLE (SURFACE INTERNE DE LAMELLE EXTÉRIEURE) ***

ALLSEL,ALL,ALL
TYPE,3
MAT,1
*DO,j,1,nb_couche,1
    REAL,j+1          ! À faire correspondre avec le REAL des éléments contact de la
                      ! couche correspondante
    LSEL,S,LINE,,j,j,1
    ESLL,S,1
    ESURF,,TOP
*ENDDO

!          *** PREP7 - MAIL - CONTACT AF (SURFACE EXTERNE DE LAMELLE INTÉRIEURE) ***

TYPE,4
MAT,1
*DO,j,1,nb_couche-1,1
    REAL,j+2          ! À faire correspondre avec le REAL des éléments target de la
                      ! couche correspondante
    LSEL,S,LINE,,j,j,1
    ESLL,S,1
    ESURF,,BOTTOM
*ENDDO

```

\*ENDIF

[...] CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

```
! _____
!
! *** SOLUTION ***

/SOLU                      ! Charge le module de solution
ANTYPE,STATIC,NEW          ! Nouvelle analyse statique
CSYS,0                     ! Retour au système de coord global
F=1702                     ! Newton
NLGEOM,ON
SOLCONTROL,ON              ! Si AUTOTS n'est pas spécifié et que SOLCONTROL,ON,
                           ! ANSYS détermine si auto time stepping est utilisé ou non
NSUBST,50

! *** SOLU - CONDITIONS LIMITES ***

! Blocage du noeud hydrostatique
D,1,UX,0

NSEL,S,LOC,Y,-H/2
D,ALL,UY,0
D,ALL,UX,0
D,ALL,UZ,0

NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0                  ! Recommandé par ANSYS (aide section 2.5.11.1) pour éviter
                           ! "spurious voids".

*IF,discont(1,1),EQ,1,THEN
  NSEL,S,LOC,Y,H/2
  D,ALL,UX,0
  D,ALL,UZ,0
*ENDIF

*IF,contact(1,1),EQ,1,THEN
  NSEL,S,LOC,Y,H/2
  CP,2,UY,ALL
*ELSE
  *DO,i,1,NNANT1,1
    NSEL,S,NODE,,NANT(i,1),NANT(i,1),1
    *DO,j,2,nb_couche,1
```

```

        NSEL,A,NODE,,NANT(i,j),NANT(i,j),1
    *ENDDO
    CP,i,UY,ALL
*ENDDO
*DO,i,1,NNANT1,1
    NSEL,S,NODE,,NANT(i,1),NANT(i,1),1
    *DO,j,2,nb_couche,1
        NSEL,A,NODE,,NANT(i,j),NANT(i,j),1
    *ENDDO
    CP,NNANT1+i,UX,ALL
*ENDDO
*ENDIF

```

```
[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

```

```

F_noeud=F
/PBC,forc,,1
ESEL,S,TYPE,,1,1,1
ESEL,R,SEC,,24,24,1
NSLE,S,ALL
NSEL,R,LOC,Y,H/2
F,ALL,FY,-F_noeud

```

```

ALLSEL,ALL,ALL
OUTRES,ALL,ALL

```

```
SOLVE
```

```
SAVE,RESULTS,DB,,ALL
```

```
FINISH
```

```

!_____
!                                     *** POST-PROCESSEUR ***

```

```
ALLSEL,ALL,ALL
```

```
! Go to post 26 and get pressure and volume over time
```

```
/post26
```

```
numvar,200
```

```
!ESOL,2,385,1 ,NMISC,2,AIRE
```

```
nsol,3,1,HDSP
```

```
/POST1
```

```

!                                     *** POST - CONTRAINTES AUX NOEUDS ***

RSYS,13      ! Rapporte les résultats dans le système de coordonnées 13, de sorte que les
              ! contraintes en X, Y et Z correspondront respectivement aux contraintes
              ! radiales, longitudinales et circonférentielles.
              ! Les contraintes S1, S2 et S3 réordonnent en ordre croissant les contraintes
              ! en X, Y et Z. Il faut donc analyser les contraintes X, Y et Z car les
              ! contraintes S1, S2 et S3 sont un mélange des valeurs des contraintes
              ! en X, Y et Z : S1 = max(X,Y,Z), S3 = min(X,Y,Z) pour chaque noeud

!                                     *** POST - RÉSULTATS AUX NOEUDS ***

SHELL,TOP    ! Sélectionne les résultats de la surface supérieur des lamelles

*DIM,SYANT_TOP,ARRAY,NNANT1,nb_couche
*DIM,SZANT_TOP,ARRAY,NNANT1,nb_couche

*DO,j,1,nb_couche,1
  *DO,i,1,NNANT1,1
    *GET,SYANT_TOP(i,j),NODE,NANT(i,j),S,Y
    *GET,SZANT_TOP(i,j),NODE,NANT(i,j),S,Z
  *ENDDO
*ENDDO

! Écriture des résultats
*IF,cas,EQ,12,THEN
  *MWRITE,SYANT_TOP(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SYANT_TOP,txt,, ...
    JIK,nb_couche,NNANT1,1
  (24F10.5)
  *MWRITE,SZANT_TOP(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SZANT_TOP,txt,, ...
    JIK,nb_couche,NNANT1,1
  (24F10.5)
*ENDIF

SHELL,BOT    ! Sélectionne les résultats de la surface supérieur des lamelles

*DIM,SYANT_BOT,ARRAY,NNANT1,nb_couche
*DIM,SZANT_BOT,ARRAY,NNANT1,nb_couche

*DO,j,1,nb_couche,1
  *DO,i,1,NNANT1,1
    *GET,SYANT_BOT(i,j),NODE,NANT(i,j),S,Y
    *GET,SZANT_BOT(i,j),NODE,NANT(i,j),S,Z

```

```

*ENDDO

*ENDDO

! Écriture des résultats
*IF, cas, EQ, 12, THEN
    *MWRITE, SYANT_BOT(1,1), ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SYANT_BOT.txt,, ...
        JIK, nb_couche, NNANT1, 1
    (24F10.5)
    *MWRITE, SZANT_BOT(1,1), ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SZANT_BOT.txt,, ...
        JIK, nb_couche, NNANT1, 1
    (24F10.5)
*ENDIF

SHELL, MID          ! Sélectionne les résultats de la moyenne entre les surfaces inférieure
                    ! et supérieure

*DIM, SXANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SYANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SZANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SXYANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SYZANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SXZANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, S1ANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, S2ANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, S3ANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SINTANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche      ! Tresca
*DIM, SEQVANT_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche      ! Von Mises
*DIM, STRAINX_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche      ! Déformation en x selon le repère RSYS, 13
*DIM, STRAINZ_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche      ! Déformation en z selon le repère RSYS, 13
*DIM, STRAINYZ_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche      ! Déformation en cisaillement dans le plan de
                                                ! l'élément (yz du repère RSYS, 13)
*DIM, STRAIN12_MID, ARRAY, NNANT1, nb_couche      ! Déformation en cisaillement dans le repère des
                                                ! fibres

! Dans le repère des fibres
*DIM, SXANT_MID_fibre, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SYANT_MID_fibre, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SZANT_MID_fibre, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SXYANT_MID_fibre, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SYZANT_MID_fibre, ARRAY, NNANT1, nb_couche
*DIM, SXZANT_MID_fibre, ARRAY, NNANT1, nb_couche

*DO, j, 1, nb_couche, 1
    *DO, i, 1, NNANT1, 1

```

```

*GET, SXANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, X
*GET, SYANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, Y
*GET, SZANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, Z
*GET, SXYANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, XY
*GET, SYZANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, YZ
*GET, SXZANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, XZ
*GET, S1ANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, 1
*GET, S2ANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, 2
*GET, S3ANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, 3
*GET, SINTANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, INT
*GET, SEQVANT_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), S, EQV
*GET, STRAINY_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), EPEL, Y
*GET, STRAINZ_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), EPEL, Z
*GET, STRAINYZ_MID(i, j), NODE, NANT(i, j), EPEL, YZ

*ENDDO
*ENDDO

!Transformation de l'état de déformation pour connaître la déformation en cisaillement dans
! le repère des fibres
*DO, j, 1, nb_couche, 1
  *DO, i, 1, NNANT1, 1
    STRAIN12_MID(i, j) = 2 * ( - (STRAINY_MID(i, j) - STRAINZ_MID(i, j)) / 2 * sin(2 * theta(1, j)) + ...
      STRAINYZ_MID(i, j) / 2 * cos(2 * theta(1, j)) )
  *ENDDO
*ENDDO

RSYS, LSYS ! Repère des fibres
*DO, j, 1, nb_couche, 1
  *DO, i, 1, NNANT1, 1
    *GET, SXANT_MID_fibre(i, j), NODE, NANT(i, j), S, X
    *GET, SYANT_MID_fibre(i, j), NODE, NANT(i, j), S, Y
    *GET, SZANT_MID_fibre(i, j), NODE, NANT(i, j), S, Z
    *GET, SXYANT_MID_fibre(i, j), NODE, NANT(i, j), S, XY
    *GET, SYZANT_MID_fibre(i, j), NODE, NANT(i, j), S, YZ
    *GET, SXZANT_MID_fibre(i, j), NODE, NANT(i, j), S, XZ
  *ENDDO
*ENDDO

! Écriture des résultats
*IF, cas, EQ, 1, THEN
[... ]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ELSEIF, cas, EQ, 12
  *MWRITE, SXANT_MID(1, 1), ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SXANT_MID, txt, , ...

```

```

      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SYANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SYANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SZANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SZANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SXYANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SXYANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SYZANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SYZANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SXZANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SXZANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,S1ANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\S1ANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,S2ANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\S2ANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,S3ANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\S3ANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SINTANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SINTANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SEQVANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SEQVANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
! *MWRITE,STRAINYZ_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\STRAINYZ_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
! (24F10.5)
*MWRITE,STRAIN12_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\STRAIN12_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SXANT_MID_fibre(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SXANT_MID_fibre, ...
      txt,, JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SYANT_MID_fibre(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SYANT_MID_fibre, ...
      txt,, JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)

```



```

*MWRITE,SZANT_MID_fibre(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SZANT_MID_fibre, ...
    txt,,JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SXYANT_MID_fibre(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SXYANT_MID_fibre, ...
    txt,,JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SYZANT_MID_fibre(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SYZANT_MID_fibre, ...
    txt,,JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*MWRITE,SXZANT_MID_fibre(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SXZANT_MID_fibre, ...
    txt,,JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

#####
! Changer le préfixe de F ci-dessus en fonction du nombre de lamelles si ce nombre excède 24.
#####

!
*** POST - DÉPLACEMENTS AUX NOEUDS ***

RSYS,0

SHELL,MID

*DIM,UXANT_MID,ARRAY,NNANT1,nb_couche
*DIM,UYANT_MID,ARRAY,NNANT1,nb_couche

*DO,j,1,nb_couche,1
    *DO,i,1,NNANT1,1
        *GET,UXANT_MID(i,j),NODE,NANT(i,j),U,X
        *GET,UYANT_MID(i,j),NODE,NANT(i,j),U,Y
    *ENDDO
*ENDDO

! Écriture des résultats
*IF,cas,EQ,1,THEN

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ELSEIF,cas,EQ,12
    *MWRITE,UXANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\UXANT_MID,txt,, ...

```

```

      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)
*WRITE,UYANT_MID(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\UYANT_MID,txt,, ...
      JIK,nb_couche,NNANT1,1
(24F10.5)

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

#####
! Changer le préfixe de F ci-dessus en fonction du nombre de lamelles si ce nombre excède 24.
#####

!
*** POST - PRESSIONS DE CONTACT ***

! Utilisation de la méthode de nombre séquentiel (Sequence Number method) pour accéder aux
! pressions aux noeuds des éléments contact

*IF,contact(1,1),EQ,1,THEN
  *DIM,PCELEM,ARRAY,NEANT,2*nb_couche-2
  *DO,j,1,nb_couche-1,1
    *DO,i,1,NEANT,1
      *GET,PCELEM(i,2*j-1),ELEM,EANT(i,j),SMISC,1
      *GET,PCELEM(i,2*j),ELEM,EANT(i,j),SMISC,2
    *ENDDO
  *ENDDO

  ! Écriture dans un fichier
  *IF,cas,EQ,3,THEN

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ELSEIF,cas,EQ,12
  *WRITE,PCELEM(1,1),ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\PC_NOEUDS_ANT,txt,, ...
      JIK,2*nb_couche-2,NEANT,1
(46F10.4)

[...]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

*ENDIF

```

```

#####
! Changer le préfixe de F ci-dessus en fonction du nombre de lamelles si ce nombre excède 24.
#####

*ENDIF

!
*** POST - DÉFORMATION EN CISAILLEMENT ***

! Utilisation de la méthode de nombre séquentiel (Sequence Number method) pour accéder aux
! déformations en cisaillement (utile pour l'anisotropie)

*IF, aniso(1,1), EQ, 1, THEN
  *DIM, SHEARSTR, ARRAY, NEANT, nb_couche
  *DO, j, 1, nb_couche, 1
    *DO, i, 1, NEANT, 1
      *GET, SHEARSTR(i, j), ELEM, ESHELL(i, j), SMISC, 12
    *ENDDO
  *ENDDO

  ! Écriture dans un fichier
  *IF, cas, EQ, 9, THEN

[... ]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

    *ELSEIF, cas, EQ, 12
      %*MWRITE, SHEARSTR(1,1), ANALYSE\ANSYS\ANISO\LIN\DISCONT\CONTACT\SHEARSTRAIN, txt,, ...
      JIK, nb_couche, NEANT, 1
      (24F10.4)

[... ]    CODE MASQUÉ CAR NON UTILISÉ POUR L'ARTICLE 4

    *ENDIF

#####
! Changer le préfixe de F ci-dessus en fonction du nombre de lamelles si ce nombre excède 24.
#####

*ENDIF

!FINISH

```



## ANNEXE VI

### PREMIER APPENDICE DE L'ARTICLE 3 : « PARABOLIC SAGITTAL PROFILE »

The parabolic profile of a lamella is defined using a second order polynomial of the form :

$$f(z) = x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad (\text{A VI-1})$$

where  $z$  is the position along the axial axis and  $x$  is the horizontal distance from axis  $z$ . This polynomial depicts a barrel shape having a curvature variation along  $\varphi$ . For the innermost lamella, the initial boundary conditions are defined by the NP's radius  $r_{NP}$  and the bulge  $b$  :

$$f(H/2) = r_{NP} \quad f(0) = r_{NP} + b \quad f(-H/2) = r_{NP} \quad (\text{A VI-2})$$

Solving Eq. (A VI-1) with Eq. (A VI-2) gives the initial constants  $a_0 = 16.8$ ,  $a_1 = 0$  and  $a_2 = -0.0165$ . The longitudinal radii of curvature  $r_\varphi$  can be obtained using the relation :

$$r_\varphi = \frac{(1 + f'(z)^2)^{3/2}}{f''(z)} \quad (\text{A VI-3})$$

Defining a unit vector in the direction  $\theta$ , and applying the cross product with the first derivative of Eq. (A VI-1) with respect to  $z$ , yields a series of vectors normal to the lamella. The coordinates of each point, evaluated with Eq. (A VI-1), and their corresponding normal vectors and radii of curvature (Eq. (A VI-3)), are then used to calculate the coordinates of the center of curvature  $R$ . The normal vectors are also used to obtain the angular positions  $\varphi$  with respect to  $z$ . It is then possible to obtain the horizontal radius  $r_h$  :

$$r_h = R + r_\varphi \sin \varphi \quad (\text{A VI-4})$$

and the circumferential radius  $r_\theta$  :

$$r_\theta = \frac{r_h}{\sin \varphi} \quad (\text{A VI-5})$$

The profiles of the remaining lamellae are obtained in a similar way, using boundary conditions matching the anchoring locations into the endplates and the offset distance from the innermost lamella, at the transverse plane, based on the thickness of the lamellae.

## ANNEXE VII

### DEUXIÈME APPENDICE DE L'ARTICLE 3 : « EQUATIONS OF THE DISCONTINUITY SOLUTION »

The theory of beam on elastic foundation gives equations for membrane forces  $N_{\varphi,i,j}^{[d]}$  and  $N_{\theta,i,j}^{[d]}$ , bending moments  $M_{\varphi,i,j}^{[d]}$  and  $M_{\theta,i,j}^{[d]}$ , radial displacements  $\delta_{i,j}^{[d]}$  and rotations  $\omega_{i,j}^{[d]}$  (Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959; Zingoni, 2001) at any point of the lamellae. According to Fig. 5.1 (c),  $\Psi$  is opposed to increasing  $\varphi$  for discontinuity effects caused by loads applied at the LVE, and the following equations apply, noting that moments and rotations are positive counterclockwise :

$$N_{\varphi,i,j}^{[d]} = -\cot\left(\varphi_{LVE,j} - \Psi_{i,j}^{[LVE]}\right) Ce^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta\right) \quad (\text{A VII-1})$$

$$N_{\theta,i,j}^{[d]} = -\frac{r_{\theta,i,j}}{r_{\varphi,i,j}} \sqrt{2} \lambda_j Ce^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A VII-2})$$

$$M_{\varphi,i,j}^{[d]} = \frac{r_{\varphi,i,j}}{\sqrt{2} \lambda_j} Ce^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A VII-3})$$

$$M_{\theta,i,j}^{[d]} = \nu M_{\varphi,i,j}^{[d]} \quad (\text{A VII-4})$$

$$\delta_{i,j}^{[d]} = -\frac{\sqrt{2} \lambda_j}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\varphi,i,j}} \right) \sin \varphi_{i,j} Ce^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \sin\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{A VII-5})$$

$$\omega_{i,j}^{[d]} = \frac{2 \lambda_{i,j}^2}{Et_j} \left( \frac{r_{\theta,i,j}^2}{r_{\varphi,i,j}^2} \right) Ce^{-\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]}} \cos\left(\lambda_j \Psi_{i,j}^{[LVE]} + \beta\right) \quad (\text{A VII-6})$$

where  $\Psi_{i,j}^{[LVE]} = \phi_{LVE,j} - \phi_{i,j}$ .  $C$  and  $\beta$  are constants of integration and  $\nu$  is the Poisson's ratio of the lamellae. Averaging  $\lambda$  for each lamella is deemed acceptable (Timoshenko et Woinowsky-Krieger, 1959; Zingoni, 2001).

Applying an edge moment  $M_{LVE,j}$  on the LVE gives the following boundary conditions :

$$N_{\phi,LVE,j}^{[d]} = 0 \quad (\text{A VII-7})$$

$$M_{\phi,LVE,j}^{[d]} = M_{LVE,j} \quad (\text{A VII-8})$$

and yields the constants :

$$C^{[M_{LVE,j}]} = \frac{2\lambda_j}{r_{\phi,i,j}} M_{LVE,j} \quad (\text{A VII-9})$$

$$\beta^{[M_{LVE,j}]} = 0 \quad (\text{A VII-10})$$

Applying an edge force  $F_{LVE,j}$  on the LVE gives the boundary conditions :

$$N_{\phi,LVE,j}^{[d]} = -F_{LVE,j} \cos \phi_{LVE,j} \quad (\text{A VII-11})$$

$$M_{\phi,LVE,j}^{[d]} = 0 \quad (\text{A VII-12})$$

and yields :



$$C^{[F_{LVE,j}]} = -\sqrt{2}F_{LVE,j} \sin \varphi_{LVE,j} \quad (\text{A VII-13})$$

$$\beta^{[F_{LVE,j}]} = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{A VII-14})$$

For the UVE, where  $\Psi_{i,j}^{[UVE]} = \varphi_{i,j} - \varphi_{UVE,j}$ , the constants are :

$$C^{[M_{UVE,j}]} = \frac{2\lambda_j}{r_{\varphi,i,j}} M_{UVE,j} \quad (\text{A VII-15})$$

$$\beta^{[M_{UVE,j}]} = 0 \quad (\text{A VII-16})$$

$$C^{[F_{UVE,j}]} = \sqrt{2}F_{UVE,j} \sin \varphi_{UVE,j} \quad (\text{A VII-17})$$

$$\beta^{[F_{UVE,j}]} = -\frac{\pi}{4} \quad (\text{A VII-18})$$

The set of equations for the discontinuity analysis is obtained by substituting these constants in Eqs. (A VII-1) to (A VII-6), while considering the added effect of both endplates for the reason explained in annex VIII.



## ANNEXE VIII

### TROISIÈME APPENDICE DE L'ARTICLE 3 : « DISTANCE ABOVE WHICH THE EDGE EFFECTS ARE NEGLIGIBLE »

In thin cylindrical and spherical shells, the edge effects vanish at a distance

$$l = \pi/\xi \quad (\text{A VIII-1})$$

where

$$\xi = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{rt_j}} \quad (\text{A VIII-2})$$

Taking  $r_\theta$  in place of  $r$  in the barrel-shaped geometry, the maximum radius is 21.3 mm, at the transverse plane on the outermost lamella.  $\xi$  is thus 0.6 mm and  $l = 5.2$  mm, which is close to the initial distance of 5.5 mm between the endplates and the transverse plane. This distance may decrease below  $l$  after axial compression of the disc. It is thus recommended to add the edge effects of the opposite endplate in the calculation of stresses and displacements.



## LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Adali, S., V. E. Verijenko, P. Y. Tabakov, et M. Walker. 1995. « Optimization of multilayered composite pressure vessels using exact elasticity solution ». In *Joint American Society of Mechanical Engineers (ASME)/Japan Society of Mechanical Engineers (JSME) pressure vessels and piping conference*. (Honolulu (HI), Jul. 23-27 1995), p. 203–212. New York (NY) : American Society of Mechanical Engineers.
- Adami, M. F. et A. Kiger. 2005. « The use of triangulation for completeness purposes ». *Nurse Researcher*, vol. 12, n° 4, p. 19–29.
- Adams, M. A. et W. C. Hutton. 1985. « Gradual disc prolapse ». *Spine*, vol. 10, n° 6, p. 524–531.
- Adams, M. A., D. S. McNally, et P. Dolan. 1996. « ‘Stress’ distributions inside intervertebral discs. The effects of age and degeneration ». *The Journal of Bone and Joint Surgery (British Volume)*, vol. 78, n° 6, p. 965–972.
- Adams, M. A. et P. J. Roughley. 2006. « What is intervertebral disc degeneration, and what causes it ? ». *Spine*, vol. 31, n° 18, p. 2151–2161.
- Adams, M. A., P. Dolan, et D. S. McNally. 2009. « The internal mechanical functioning of intervertebral discs and articular cartilage, and its relevance to matrix biology ». *Matrix Biology*, vol. 28, n° 7, p. 384–389.
- Allaire, M., J. Gamache, J. Lemay, G. Ricard, et F. Veilleux. 2007. *Statistiques sur les affections vertébrales, 2003-2006*. Rapport DC 300-274-1. Québec : Direction de la comptabilité et de la gestion de l’information, Service de la statistique, Équipe des productions statistiques, Commission de la santé et de la sécurité du travail du Québec, 28 p.
- Ambard, D. et F. Cherblanc. 2009. « Mechanical behavior of annulus fibrosus : a microstructural model of fibers reorientation ». *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 37, n° 11, p. 2256–2265.
- ANSYS. 2007. *ANSYS® Academic Research*, version 11.0. Logiciel. Southpointe (Pa.) : ANSYS, Inc.
- ANSYS. 2011. *ANSYS® Academic Research*, version 14.0. Logiciel. Southpointe (Pa.) : ANSYS, Inc.
- Aspden, R. M., D. S. Hickey, et D. W. L. Hukins. 1981. « Determination of collagen fibril orientation in the cartilage of the vertebral end-plate and its relationship to mechanical stability ». *Connective tissue research*, vol. 9, n° 2, p. 83–7.
- Ayturk, U. M., J. J. Garcia, et C. M. Puttlitz. 2010. « The micromechanical role of the annulus fibrosus components under physiological loading of the lumbar spine ». *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 132, n° 6, p. 061007-1–061007-8.

- Bendo, J. A. et J. N. Awad. 2006. *Lumbar disk herniation*, In *Orthopaedic Knowledge Update : Spine 3*, sous la dir. de J. M. Spivak and P. J. Connolly, 3<sup>e</sup> éd., p. 289–297. Rosemont (IL) : American Academy of Orthopaedic Surgeons.
- Bonneville, J.-F., M. Runge, F. Cattin, P. Potelon, et Y.-S. Tang. 1989. « Extraforaminal lumbar disc herniations : CT demonstration of Sharpey's fibers avulsion ». *Neuroradiology*, vol. 31, n° 1, p. 71–74.
- Botsford, D. J., S. I. Esses, et D. J. Ogilvie-Harris. 1994. « In vivo diurnal variation in intervertebral disc volume and morphology ». *Spine (Phila Pa 1976)*, vol. 19, n° 8, p. 935–940.
- Bouvette, C. 2005. *Modélisation d'une unité intervertébrale l5s1*. Rapport. Montréal (Qc) : École de technologie supérieure, 38 p.
- Broberg, K. B. 1983. « On the mechanical behaviour of intervertebral discs ». *Spine*, vol. 8, n° 2, p. 151–165.
- Broberg, K. B. et H. O. von Essen. 1980. « Modeling of intervertebral discs ». *Spine*, vol. 5, n° 2, p. 155–167.
- Bursa, J., P. Skacel, M. Zemanek, et D. Kreuter. 2008. « Implementation of hyperelastic models for soft tissues in FE program and identification of their parameters ». In *Proceedings of the Sixth IASTED International Conference on Biomedical Engineering*. (Innsbruck, Austria, Feb. 13-15 2008), p. 205–209. Anaheim (CA) : ACTA Press.
- Calladine, C. R. 1985. « Gaussian curvature and shell structures ». In *The Mathematics of Surfaces*, J.A. Gregory (éd). p. 179–196. Oxford University Press.
- Canale, S. T. et J. H. Beaty. 2008. *Campbell's operative orthopaedics*, volume 2. Philadelphia : Mosby Elsevier, 2350 p.
- Cassidy, J. J., A. Hiltner, et E. Baer. 1989. « Hierarchical Structure of the Intervertebral Disc ». *Connective Tissue Research*, vol. 23, n° 1, p. 75–88.
- Chagnon, A., C.-É. Aubin, et I. Villemure. 2010. « Biomechanical Influence of Disk Properties on the Load Transfer of Healthy and Degenerated Disks Using a Poroelastic Finite Element Model ». *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 132, n° 11, p. 111006-1–111006-8.
- Collinge, C., R. Liboiron, R. Alie, L. Blain, D. Chicoine, J. Jargot, L. Picard, A. Plamondon, C. Pouliot, et M. St-Vincent. 2009. *Bulletin du réseau d'échanges sur la manutention : Mot de la rédaction, des idées pour alléger la tâche ! Rapport n° 3 - Août*. Montréal (Qc) : Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST) et Commission de la santé et de la sécurité du travail du Québec (CSST), 6 p.
- Delamarche, P., M. Dufour, F. Multon, et L. Perlemuter. 2002. *Anatomie, physiologie, biomécanique en STAPS*. Paris : Masson, 287 p.

- Demers, S., A.-H. Bouzid, et S. Nadeau. 2012. « Stress Analysis of the Intervertebral Disc Using a Developed Multi-Shell Model ». In *Twelfth Pan American Congress of Applied Mechanics (Proceedings of PACAM XII)*. (Port of Spain, Trinidad, Jan. 2-6 2012), p. 1–7. New York (NY) : American Society of Mechanical Engineers.
- Demers, S., A.-H. Bouzid, et S. Nadeau. 2013. « On the Modeling of an Intervertebral Disc Using a Novel Large Deformation Multi-Shell Approach ». *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 135, n° 5, p. 051003-1–051003-8.
- Dionne, C., R. Bourbonnais, P. Frémont, M. Rossignol, et S. Stock. 2004. *Le pronostic occupationnel des travailleurs aux prises avec des affections vertébrales*. Rapport R-356. Montréal (Qc) : Institut de recherche Robert-Sauvé en santé et en sécurité du travail (IRSST), Direction des communications, 147 p.
- Dreischarf, M., A. Rohlmann, G. Bergmann, et T. Zander. 2011. « Optimised loads for the simulation of axial rotation in the lumbar spine ». *Journal of Biomechanics*, vol. 44, n° 12, p. 2323–2327.
- Dreischarf, M., A. Rohlmann, G. Bergmann, et T. Zander. 2012. « Optimised in vitro applicable loads for the simulation of lateral bending in the lumbar spine ». *Medical Engineering & Physics*, vol. 34, n° 6, p. 777–780.
- Eberlein, R., G. A. Holzapfel, et M. Fröhlich. 2004. « Multi-segment FEA of the human lumbar spine including the heterogeneity of the annulus fibrosus ». *Computational Mechanics*, vol. 34, n° 2, p. 147–163.
- Eijkelkamp, M. F. 2002. « On the development of an artificial intervertebral disc ». PhD thesis, Netherlands, University of Groningen, 106 p. *Unpublished Dissertation*, Faculty of Medical Sciences.
- Elliott, D. M. et L. A. Setton. 2001. « Anisotropic and inhomogeneous tensile behavior of the human anulus fibrosus : experimental measurement and material model predictions ». *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 123, n° 3, p. 256–263.
- Ezquerro, F., F. G. Vacas, S. Postigo, M. Prado, et A. Simón. 2011. « Calibration of the finite element model of a lumbar functional spinal unit using an optimization technique based on differential evolution ». *Medical Engineering & Physics*, vol. 33, n° 1, p. 89–95.
- Ferguson, S. J., K. Ito, et L.-P. Nolte. 2004. « Fluid flow and convective transport of solutes within the intervertebral disc ». *Journal of Biomechanics*, vol. 37, n° 2, p. 213–221.
- Flick, U. 1992. « Triangulation revisited : strategy of validation or alternative ? ». *Journal for the Theory of Social Behaviour*, vol. 22, n° 2, p. 175–197.
- Galante, J. O. 1967. « Tensile properties of the human lumbar annulus fibrosus ». *Acta Orthopaedica Scandinavica*, vol. (Suppl), n° 100, p. 1–91.

- Galbusera, F., H. Schmidt, C. Neidlinger-Wilke, et H.-J. Wilke. 2011a. « The effect of degenerative morphological changes of the intervertebral disc on the lumbar spine biomechanics : a poroelastic finite element investigation ». *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, vol. 14, n° 8, p. 729–739.
- Galbusera, F., H. Schmidt, J. Noailly, A. Malandrino, D. Lacroix, H.-J. Wilke, et A. Shirazi-Adl. 2011b. « Comparison of four methods to simulate swelling in poroelastic finite element models of intervertebral discs ». *Journal of the Biomechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 4, n° 7, p. 1234–1241.
- Gibson, R. F. 2007. *Principles of composite material mechanics*, 2<sup>e</sup> éd. Boca Raton : CRC Press, 579 p.
- Goto, K., N. Tajima, E. Chosa, K. Totoribe, H. Kuroki, Y. Arizumi, et T. Arai. 2002. « Mechanical analysis of the lumbar vertebrae in a three-dimensional finite element method model in which intradiscal pressure in the nucleus pulposus was used to establish the model ». *Journal of Orthopaedic Science*, vol. 7, n° 2, p. 243–246.
- Gregory, D. E., W. C. Bae, R. L. Sah, et K. Masuda. 2012. « Anular delamination strength of human lumbar intervertebral disc ». *European Spine Journal*, vol. 21, n° 9, p. 1–8.
- Guerber-Cahuzac, A. 2010. *L'exposition des salariés aux maladies professionnelles en 2007*. Rapport n° 056. France : Direction de l'animation de la recherche, des études et des statistiques (DARES Analyses), 11 p.
- Guerin, H. L. et D. M. Elliott. 2006. « Degeneration affects the fiber reorientation of human annulus fibrosus under tensile load ». *Journal of Biomechanics*, vol. 39, n° 8, p. 1410–1418.
- Guerin, H. L. et D. M. Elliott. 2007. « Quantifying the contributions of structure to annulus fibrosus mechanical function using a nonlinear, anisotropic, hyperelastic model ». *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 25, n° 4, p. 508–516.
- Gunzburg, R., W. C. Hutton, G. Crane, et R. D. Fraser. 1992. « Role of the capsulo-ligamentous structures in rotation and combined flexion-rotation of the lumbar spine ». *Journal of Spinal Disorders*, vol. 5, n° 1, p. 1–7.
- Guo, Z., X. Shi, X. Peng, et F. Caner. 2012. « Fibre–matrix interaction in the human annulus fibrosus ». *Journal of the Biomechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 5, n° 1, p. 193–205.
- Han, S. K., C.-W. Chen, J. Wierwille, Y. Chen, et A. H. Hsieh. 2015. « Three dimensional mesoscale analysis of translamellar cross-bridge morphologies in the annulus fibrosus using optical coherence tomography ». *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 33, n° 3, p. 304–311.



- Heuer, F., H. Schmidt, L. Claes, et H.-J. Wilke. 2008a. « A new laser scanning technique for imaging intervertebral disc displacement and its application to modeling nucleotomy ». *Clinical Biomechanics*, vol. 23, n° 3, p. 260–269.
- Heuer, F., H. Schmidt, et H.-J. Wilke. 2008b. « The relation between intervertebral disc bulging and annular fiber associated strains for simple and complex loading ». *Journal of Biomechanics*, vol. 41, n° 5, p. 1086–1094.
- Hickey, D. S. et D. W. Hukins. 1980. « Relation between the structure of the annulus fibrosus and the function and failure of the intervertebral disc ». *Spine*, vol. 5, n° 2, p. 106–116.
- Holzappel, G. A., C. A. J. Schulze-Bauer, G. Feigl, et P. Regitnig. 2005. « Single lamellar mechanics of the human lumbar annulus fibrosus ». *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 3, n° 3, p. 125–140.
- Holzappel, G. A. 2000. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. Chichester : Wiley, 470 p.
- Holzappel, G. A. et T. C. Casser. 2000. « A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models ». *Journal of Elasticity*, vol. 61, n° 1–3, p. 1–48.
- Hukins, D. W. L. 1992. « A simple model for the function of proteoglycans and collagen in the response to compression of the intervertebral disc ». *Proceedings : Biological sciences. Royal Society*, vol. 249, n° 1326, p. 281–285.
- Hukins, D. W. L. et J. R. Meakin. 2000. « Relationship between structure and mechanical function of the tissues of the intervertebral joint ». *American Zoologist*, vol. 40, n° 1, p. 42–52.
- Iatridis, J. C. et I. ap Gwynn. 2004. « Mechanisms for mechanical damage in the intervertebral disc annulus fibrosus ». *Journal of Biomechanics*, vol. 37, n° 8, p. 1165–1175.
- Iatridis, J. C., M. Weidenbaum, L. A. Setton, et V. C. Mow. 1996. « Is the Nucleus Pulposus a Solid or a Fluid ? Mechanical Behaviors of the Nucleus Pulposus of the Human Intervertebral Disc ». *Spine*, vol. 21, n° 10, p. 1174–1184.
- Jacobs, N. T., D. H. Cortes, J. M. Peloquin, E. J. Vresilovic, et D. M. Elliott. 2014. « Validation and application of an intervertebral disc finite element model utilizing independently constructed tissue-level constitutive formulations that are nonlinear, anisotropic, and time-dependent ». *Journal of Biomechanics*, vol. 47, n° 11, p. 2540–2546.
- Jahed, H., B. Farshi, et M. Karimi. 2006. « Optimum autofrettage and shrink-fit combination in multi-layer cylinders ». *Journal of Pressure Vessel Technology*, vol. 128, n° 2, p. 196–200.

- Johnson, E. F., K. Chetty, I. M. Moore, A. Stewart, et W. Jones. 1982. « The distribution and arrangement of elastic fibres in the intervertebral disc of the adult human ». *Journal of Anatomy*, vol. 135, n° 2, p. 301–309.
- Kamińska, J., D. Roman-Liu, T. Zagrajek, et P. Borkowski. 2010. « Differences in lumbar spine load due to posture and upper limb external load ». *International Journal of Occupational Safety and Ergonomics (JOSE)*, vol. 16, n° 4, p. 421–430.
- Karajan, N. 2012. « Multiphasic intervertebral disc mechanics : theory and application ». *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 19, n° 2, p. 261–339.
- Klein, J. A., D. S. Hickey, et D. W. Hukins. 1983. « Radial bulging of the annulus fibrosus during compression of the intervertebral disc ». *Journal of Biomechanics*, vol. 16, n° 3, p. 211–217.
- Klein, J. A. et D. W. Hukins. 1982. « X-ray diffraction demonstrates reorientation of collagen fibres in the annulus fibrosus during compression of the intervertebral disc ». *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - General Subjects*, vol. 717, n° 1, p. 61 - 64.
- Kuo, C.-S., H.-T. Hu, R.-M. Lin, K.-Y. Huang, P.-C. Lin, Z.-C. Zhong, et M.-L. Hsieh. 2010. « Biomechanical analysis of the lumbar spine on facet joint force and intradiscal pressure - a finite element study ». *BMC Musculoskeletal Disorders*, vol. 151, n° 11, p. 1–13.
- Kurtz, S. M. et A. A. Edidin. 2006. *Spine technology handbook*. Burlington : Elsevier, 535 p.
- Lam, S. K. L., S. C. W. Chan, V. Y. L. Leung, W. W. Lu, K. M. C. Cheung, et K. D. K. Luk. 2011. « The role of cryopreservation in the biomechanical properties of the intervertebral disc ». *European Cells and Materials*, vol. 22, p. 393–402.
- Lamé, G. 1866. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2<sup>e</sup> éd. Paris : Gauthier-Villars, 335 p.
- Lauerman, W. C. et B. P. Graw. 2008. « Spine », In *Review of orthopaedics*, sous la dir. de Mark D. Miller, 5<sup>e</sup> éd., p. 471–497. Philadelphie (PA) : Saunders Elsevier.
- Laurencelle, L. 2005. *Abrégé sur les méthodes de recherche et la recherche expérimentale*. Sainte-Foy (Québec) : Presses de l'Université du Québec, 115 p.
- Little, J. P., C. J. Adam, J. H. Evans, G. J. Pettet, et M. J. Pearcy. 2007. « Nonlinear finite element analysis of anular lesions in the L4/5 intervertebral disc ». *Journal of Biomechanics*, vol. 40, n° 12, p. 2744–2751.
- Luxmoore, B., V. Wijayathunga, et S. Rehman. 2012. « Investigating the mechanical role of cross-bridging in the annulus fibrosus using finite element analysis ». In *Transactions of the 58th Annual Meeting of Orthopaedic Research Society*. (San Francisco (CA), Feb. 4-7 2012), p. 2164. Rosemont (IL) : Orthopaedic Research Society.

- Malandrino, A., J. A. Planell, et D. Lacroix. 2009. « Statistical factorial analysis on the poroelastic material properties sensitivity of the lumbar intervertebral disc under compression, flexion and axial rotation ». *Journal of Biomechanics*, vol. 42, n° 16, p. 2780–2788.
- Marchand, F. et A. M. Ahmed. 1990. « Investigation of the laminate structure of lumbar disc annulus fibrosus ». *Spine*, vol. 15, n° 5, p. 402–410.
- Marini, G. et S. J. Ferguson. 2014. « Modelling the influence of heterogeneous annulus material property distribution on intervertebral disk mechanics ». *Annals of Biomechanical Engineering*, vol. 42, n° 8, p. 1760–1772.
- Massey, C. J., C. C. van Donkelaar, E. Vresilovic, A. Zavaliangos, et M. Marcolongo. 2011. « Effects of Aging and Degeneration on the Human Intervertebral Disc during the Diurnal Cycle : A Finite Element Study ». *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 30, n° 1, p. 122–128.
- MATLAB. 2009. *Matlab*, version 2009a. Logiciel. Natick (Ma.) : MathWorks.
- MATLAB. 2012. *Matlab*, version 2012b. Logiciel. Natick (Ma.) : MathWorks.
- McMillan, D. W., G. Garbutt, et M. A. Adams. 1996. « Effect of sustained loading on the water content of intervertebral discs : implications for disc metabolism ». *Annals of the Rheumatic Diseases*, vol. 55, n° 12, p. 880–887.
- McNally, D. S. et M. A. Adams. 1992. « Internal intervertebral disc mechanics as revealed by stress profilometry ». *Spine*, vol. 17, n° 1, p. 66–73.
- McNally, D. S. et R. G. C. Arridge. 1995. « An analytical model of intervertebral disc mechanics ». *Journal of Biomechanics*, vol. 28, n° 1, p. 53–68.
- Melrose, J., S. M. Smith, R. C. Appleyard, et C. B. Little. 2008. « Aggrecan, versican and type VI collagen are components of annular translamellar crossbridges in the intervertebral disc ». *European Spine Journal*, vol. 17, n° 2, p. 314–324.
- Moore, K. L. et A. F. Dalley. 2001. *Anatomie médicale : aspects fondamentaux et applications cliniques*. Paris, France : De Boeck, 1177 p.
- Moramarco, V., A. del Palomar, C. Pappalettere, et M. Doblaré. 2010. « An accurate validation of a computational model of a human lumbosacral segment ». *Journal of Biomechanics*, vol. 43, n° 2, p. 334–342.
- Nachemson, A. 1981. « Disc pressure measurements ». *Spine*, vol. 6, n° 1, p. 93–97.
- Nachemson, A. et J. M. Morris. 1964. « In vivo measurements of intradiscal pressure : discometry, a method for the determination of pressure in the lower lumbar discs ». *The Journal of Bone and Joint Surgery*, vol. 46, p. 1077–1092.

- Nachemson, A. 1960. « Lumbar intradiscal pressure. Experimental studies on post-mortem material ». *Acta Orthopaedica Scandinavica*, vol. Supplementum 43, n° 1, p. 1–104.
- Nadeau, S. 2001. « Outil d'analyse multifactorielle pour la prévention des lésions au dos ». Thèse de doctorat en génie électrique, Montréal, Université de Montréal, 652 p.
- Naga, S. A. et M. Mokhtar. 2005. « An analytical and finite element analysis study of multilayered pressure vessels under thermal conditions ». In *Pressure Vessels and Piping Division Conference*. (Denver (CO), Jul. 17-21 2005), p. 173–179. New York (NY) : American Society of Mechanical Engineers.
- Natarajan, R. N., J. R. Williams, S. A. Lavender, H. S. An, et G. B. Andersson. 2008. « Relationship between disc injury and manual lifting : a poroelastic finite element model study ». *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers ; Part H*, vol. 222, n° 2, p. 195–207.
- Netter, F. H. 2006. *Atlas of Human Anatomy*, 4<sup>e</sup> éd. Philadelphia : Saunders, 548 p.
- Ngwa, M. et E. Agyingi. 2011. « A mathematical model of the compression of a spinal disc ». *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 8, n° 4, p. 1061–1083.
- Niemeyer, F., H.-J. Wilke, et H. Schmidt. 2012. « Geometry strongly influences the response of numerical models of the lumbar spine - a probabilistic finite element analysis ». *Journal of Biomechanics*, vol. 8, n° 45, p. 1414–1423.
- Noailly, J., J. A. Planell, et D. Lacroix. 2011. « On the collagen criss-cross angles in the annuli fibrosi of lumbar spine finite element models ». *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 10, n° 2, p. 203–219.
- Nosikova, Y. S., J. P. Santerre, M. Gryn timer, G. Gibson, et R. A. Kandel. 2012. « Characterization of the annulus fibrosus - vertebral body interface : identification of new structural features ». *Journal of Anatomy*, vol. 221, n° 6, p. 577–589.
- Osti, O. L., B. Vernon-Roberts, R. Moore, et R. D. Fraser. 1992. « Annular tears and disc degeneration in the lumbar spine : A post-mortem study of 135 discs ». *The Journal of Bone and Joint Surgery*, vol. 74, n° 5, p. 678–682.
- O'Connell, G. D., E. J. Vresilovic, et D. M. Elliott. 2010. « Human intervertebral disc internal strain in compression : the effect of disc region, loading position, and degeneration ». *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 29, n° 4, p. 547–555.
- O'Connell, G. D., S. Sen, et D. M. Elliott. 2012. « Human annulus fibrosus material properties from biaxial testing and constitutive modeling are altered with degeneration ». *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 11, n° 3–4, p. 493–503.
- Paietta, R. C., E. L. Burger, et V. L. Ferguson. 2013. « Mineralization and collagen orientation throughout aging at the vertebral endplate in the human lumbar spine ». *Journal of Structural Biology*, vol. 184, n° 2, p. 310–320.

- Peacock, A. 1952. « Observations on the postnatal structure of the intervertebral disc in man ». *Journal of Anatomy*, vol. 86 (Pt 2), p. 162–179.
- Peloquin, J. M., J. H. Yoder, N. T. Jacobs, S. M. Moon, A. C. Wright, E. J. Vresilovic, et D. M. Elliott. 2014. « Human L3L4 intervertebral disc mean 3D shape, modes of variation, and their relationship to degeneration ». *Journal of Biomechanics*, vol. 47, n° 10, p. 2452–2459.
- Peng, X. Q., Z. Y. Guo, et B. Moran. 2006. « An anisotropic hyperelastic constitutive model with fiber-matrix shear interaction for the human annulus fibrosus ». *Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, n° 5, p. 815–824.
- Pezowicz, C. A., P. A. Robertson, et N. D. Broom. 2006. « The structural basis of interlamellar cohesion in the intervertebral disc wall ». *Journal of Anatomy*, vol. 208, n° 3, p. 317–330.
- Pintar, F. A., N. Yoganandan, T. Myers, A. Elhagediab, et A. Sances Jr. 1992. « Biomechanical properties of human lumbar spine ligaments ». *Journal of Biomechanics*, vol. 25, n° 11, p. 1351–1356.
- Popper, K. R. 1984. *La logique de la découverte scientifique*. Paris : Payot, 480 p.
- Provencher, J., S. Blouin, et D. Lamarche. 2010. *Statistiques sur les affections vertébrales, 2006-2009*. Rapport DC 300-274-4. Québec : Direction de la comptabilité et de la gestion de l'information, Service de la statistique, Commission de la santé et de la sécurité du travail du Québec (CSST), 28 p.
- Provencher, J., A. Barbeau, et D. Lamarche. 2012. *Statistiques sur les affections vertébrales, 2008-2011*. Rapport DC 300-274-6. Québec : Direction de la comptabilité et de la gestion de l'information, Service de la statistique, Commission de la santé et de la sécurité du travail du Québec (CSST), 27 p.
- Provencher, J., S. Blouin, A. Barbeau, D. Lamarche, et J. Aubin. 2014. *Statistiques sur les lésions attribuables aux tms en milieu de travail, 2010-2013*. Rapport DC 300-322-1. Québec : Direction de la comptabilité et de la gestion de l'information, Centre de la statistique et de l'information de gestion, Commission de la santé et de la sécurité du travail du Québec (CSST), 34 p.
- Prud'Homme, D. 2008. « Mécanisme de la hernie discale : modélisation non-linéaire ». Mémoire de maîtrise en génie mécanique, Montréal, École de technologie supérieure, 155 p.
- Raj, P. P. 2007. « Intervertebral disc : anatomy – physiology – pathophysiology – treatment ». *Pain Practice*, vol. 8, n° 1, p. 18–44.
- Roaf, R. 1960. « A study of the mechanics of spinal injuries ». *The Journal of Bone and Joint Surgery*, vol. 42, n° 4, p. 810–823.
- Roark, R. J., W. C. Young, et R. G. Budynas. 2002. *Roark's formulas for stress and strain*, 7<sup>e</sup> éd. New York : McGraw-Hill, 852 p.

- Rodrigues, S. A., K. R. Wade, A. Thambyah, et N. D. Broom. 2012. « Micromechanics of annulus–end plate integration in the intervertebral disc ». *The Spine Journal*, vol. 12, n° 2, p. 143–150.
- Rohlmann, A., T. Zander, M. Rao, et G. Bergmann. 2009. « Applying a follower load delivers realistic results for simulating standing ». *Journal of Biomechanics*, vol. 42, n° 10, p. 1520–1526.
- Saban, K. L., S. M. Penckofer, I. Androwich, et F. B. Bryant. 2001. « Health-related quality of life of patients following selected types of lumbar spinal surgery : A pilot study ». *Health and Quality of Life Outcomes*, vol. 5, n° 71, p. 1–11.
- Sachs, B. L., H. Vanharanta, M. A. Spivey, R. D. Guyer, T. Videman, R. F. Rashbaum, R. G. Johnson, S. H. Hochschuler, et V. Mooney. 1987. « Dallas discogram description. A new classification of CT/discography in low-back disorders ». *Spine*, vol. 12, n° 3, p. 287–294.
- Sato, K., S. Kikuchi, et T. Yonezawa. 1999. « In vivo intradiscal pressure measurement in healthy individuals and in patients with ongoing back problems ». *Spine*, vol. 24, n° 23, p. 2468–2474.
- Schmidt, H., A. Shirazi-Adl, F. Galbusera, et H.-J. Wilke. 2010. « Response analysis of the lumbar spine during regular daily activities–A finite element analysis ». *Journal of Biomechanics*, vol. 43, n° 10, p. 1849–1856.
- Schmidt, H., F. Heuer, J. Drumm, Z. Klezl, L. Claes, et H.-J. Wilke. 2007a. « Application of a calibration method provides more realistic results for a finite element model of a lumbar spinal segment ». *Clinical Biomechanics*, vol. 22, n° 4, p. 377–384.
- Schmidt, H., A. Kettler, F. Heuer, U. Simon, L. Claes, et H.-J. Wilke. 2007b. « Intradiscal pressure, shear strain, and fiber strain in the intervertebral disc under combined loading ». *Spine*, vol. 32, n° 7, p. 748–755.
- Schmidt, H., F. Heuer, et H.-J. Wilke. 2009. « Dependency of disc degeneration on shear and tensile strains between annular fiber layers for complex loads ». *Medical Engineering & Physics*, vol. 31, n° 6, p. 642–649.
- Schollum, M. L., P. A. Robertson, et N. D. Broom. 2009. « A microstructural investigation of intervertebral disc lamellar connectivity : detailed analysis of the translamellar bridges ». *Journal of Anatomy*, vol. 241, n° 6, p. 805–816.
- Schroeder, Y., D. M. Elliott, W. Wilson, F. P. T. Baaijens, et J. M. Huyghe. 2008. « Experimental and model determination of human intervertebral disc osmoviscoelasticity ». *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 26, n° 8, p. 1141–1146.
- Shirazi-Adl, S. A., S. C. Shrivastava, et A. M. Ahmed. 1984. « Stress analysis of the lumbar disc-body unit in compression. A three-dimensional nonlinear finite element study ». *Spine*, vol. 9, n° 2, p. 120–134.



- Skaggs, D. L., M. Weidenbaum, J. C. Iatridis, A. Ratcliffe, et V. C. Mow. 1994. « Regional variation in tensile properties and biochemical composition of the human lumbar annulus fibrosus ». *Spine*, vol. 19, n° 12, p. 1310–1319.
- Skrzypiec, D. M., P. Pollintine, A. Przybyla, P. Dolan, et M. A. Adams. 2007. « The internal mechanical properties of cervical intervertebral discs as revealed by stress profilometry ». *European Spine Journal*, vol. 16, n° 10, p. 1701–1709.
- Smith, L. J. et D. M. Elliott. 2011. « Formation of lamellar cross bridges in the annulus fibrosus of the intervertebral disc is a consequence of vascular regression ». *Matrix Biology*, vol. 30, n° 4, p. 267–274.
- Smith, L. J. et N. L. Fazzalari. 2009. « The elastic fibre network of the human lumbar annulus fibrosus : architecture, mechanical function and potential role in the progression of intervertebral disc degeneration ». *European Spine Journal*, vol. 18, n° 4, p. 439–448.
- Spivak, J. M. et P. J. Connolly. 2006. *Orthopaedic knowledge update : spine 3*, 3<sup>e</sup> éd. Rosemont, IL : American Academy of Orthopaedic Surgeons, 550 p.
- Swider, P., A. Pédrone, D. Ambard, F. Accadbled, et J. S. de Gauzy. 2010. « Substructuring and poroelastic modelling of the intervertebral disc ». *Journal of Biomechanics*, vol. 43, n° 7, p. 1287–1291.
- Thémis, A. 2003. *Représentations sociales et triangulation : enjeux théorico-méthodologiques*. Toulouse : ERES, « Hors collection », 296 p.
- Thompson, J. P., R. H. Pearce, M. T. Schechter, M. E. Adams, I. K. Y. Tsang, et P. B. Bishop. 1990. « Preliminary evaluation of a scheme for grading the gross morphology of the human intervertebral disc ». *Spine*, vol. 15, n° 5, p. 411–415.
- Timoshenko, S. et S. Woinowsky-Krieger. 1959. *Theory of plates and shells*, 2<sup>e</sup> éd. New York : McGraw-Hill, 480 p.
- Vasiliev, V. V. 2009. *Composite pressure vessels, analysis, design, and manufacturing*. Blacksburg, Virginia : Bull Ridge Publishing, 690 p.
- Viceconti, M. 2005. « Extracting clinically relevant data from finite element simulations ». *Clinical Biomechanics*, vol. 20, n° 5, p. 451–454.
- Wagnac, E., P.-J. Arnoux, A. Garo, M. El-Rich, et C.-É. Aubin. 2011. « Calibration of hyperelastic material properties of the human lumbar intervertebral disc under fast dynamic compressive loads ». *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 133, n° 10, p. 101007-01-101007-10.
- Wagner, D. R. et J. C. Lotz. 2004. « Theoretical model and experimental results for the non-linear elastic behavior of human annulus fibrosus ». *Journal of Orthopaedic Research*, vol. 22, n° 4, p. 901–909.

- Wang, S., W. M. Park, H. R. Gadikota, J. Miao, Y. H. Kim, K. B. Wood, et G. Li. 2012. « A combined numerical and experimental technique for estimation of the forces and moments in the lumbar intervertebral disc ». *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, p. 1–9.
- Waters, T. R., V. Putz-Anderson, A. Garg, et L. J. Fine. 1993. « Revised NIOSH equation for the design and evaluation of manual lifting tasks ». *Ergonomics*, vol. 36, n° 7, p. 749–776.
- Wenger, K. H. et J. D. Schlegel. 1997. « Annular bulge contours from an axial photogrammetric method ». *Clinical Biomechanics*, vol. 12, n° 7/8, p. 438–444.
- Wilke, H.-J., P. Neef, M. Caimi, T. Hoogland, et L. E. Claes. 1999. « New in vivo measurements of pressures in the intervertebral disc in daily life ». *Spine*, vol. 24, n° 8, p. 755–762.
- Wilke, H.-J., P. Neef, B. Hinz, H. Seidel, et L. E. Claes. 2001. « Intradiscal pressure together with anthropometric data – a data set for the validation of models ». *Clinical Biomechanics*, vol. 16, n° Suppl 1, p. S111–126.
- Williams, K. D. et A. L. Park. 2008. « Lower back pain and disorders of intervertebral discs », In *Campbell's operative orthopaedics*, sous la dir. de S. Therry Canale et James H. Beaty, 11<sup>e</sup> éd., p. 2159–2236. Vol. 2. Philadelphie (PA) : Mosby Elsevier.
- Yuan, G., H. Liu, et Z. Wang. 2010. « Optimum design for shrink-fit multi-layer vessels under ultrahigh pressure using different materials ». *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, vol. 23, n° 5, p. 582–589.
- Zander, T., P. Krishnakanth, G. Bergmann, et A. Rohlmann. 2010. « Diurnal variations in intervertebral disc height affect spine flexibility, intradiscal pressure and contact compressive forces in the facet joints ». *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, vol. 13, n° 5, p. 551–557.
- Zhou, S. H., I. D. McCarthy, A. H. McGregor, R. R. H. Coombs, et S. P. F. Hughes. 2000. « Geometrical dimensions of the lower lumbar vertebrae – analysis of data from digitised CT images ». *European Spine Journal*, vol. 9, n° 3, p. 242–248.
- Zingoni, A. 1995. « On the membrane solutions for elevated shell-of-revolution tanks of certain meridional profiles ». *Thin-Walled Structures*, vol. 22, n° 2, p. 121–142.
- Zingoni, A. 2001. « Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors : discontinuity effects ». *Engineering Structures*, vol. 23, n° 11, p. 1373–1382.